PROBLEME DER GELDPOLITIK UNTER BESONDERER BERÜCKSICHTIGUNG DER REAKTIONEN DER GESCHÄFTSBANKEN

– Eine steuerungstheoretische Untersuchung –

DISSERTATION

zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der Wirtschaftswissenschaft
(doctor rerum politicarum)
der Rechts- und Wirtschaftswissenschaftlichen Fakultät
der Universität des Saarlandes

Heinz Herrmann

1978

Saarbrücken

1977

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547303_0005

'Probleme der Geldpolitik unter besonderer Berücksichtigung der Reaktionen der Geschäftsbanken'

- Eine steuerungstheoretische Untersuchung -

Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der Wirtschaftswissenschaft
(doctor rerum politicarum)
der Rechts- und Wirtschaftswissenschaftlichen Fakultät
der Universität des Saarlandes

Heinz Herrmann
Saarbrücken 1977

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Tag der Disputation: 17. Februar 1978
Dekan: Prof. Dr. D. Krauß
Erstberichterstatter: Prof. Dr. R. Richter
Zweitberichterstatter: Prof. Dr. V. Steinmetz

Gliederung

1.)	Einleitung: Absichtserklärung und Abgrenzung der Arbeit	1
2.)	Das statische Modell	2
2.1.)	Geldpolitik unter Verwendung des statischen Geldschöpfungsmultiplikators	2
2.2.)	Kritik am Konzept des statischen Geldschöpfungsmultiplikators	6
2.3.)	Das einfachste Modell einer Spielsituation mit Zentralbankgeld und Bonds	8
2.3.1.)	Die Herleitung des Modells	8
2.3.2.)	Die Anwendung des Modells	17
2.4.)	Die Erweiterung des Modells um Geldmarktpapiere und die Bedeutung für das 'einfachste Modell'	26
2.5.)	Die Aufnahme stochastischer Elemente	30
3.)	Dynamische Modelle mit der expliziten Berücksichtigung einer Entscheidungseinheit	34
3.1.)	Ansatzpunkte für eine dynamische Formulierung	34
3.2.)	Geldpolitik bei einem dynamischen Geldschöpfungsmultiplikator	36
3.2.1.)	Herleitung eines Modells mit dynamischem Geldschöpfungsmultiplikator	36
3.2.2.)	Die optimale Zentralbankpolitik in einem Modell mit dynamischem Geldschöpfungsmultiplikator	51

3.2.3.)	Die optimale Zentralbankpolitik in einem allgemeinen Modell	62
3.2.4.)	Das Problem der Instrumenteninstabilität	67
3.3.)	Geldpolitik bei autonomen Geschäftsbanken	72
3.3.1.)	Modelle mit autonomen Geschäftsbanken	72
3.3.2.)	Die optimale Zentralbankpolitik in einem Modell mit autonomen Geschäftsbanken und variablen Zielgrößen	77
3.4.)	Ein Modell des Geschäftsbankenverhaltens bei autonomer Zentralbank	82
3.4.1.)	Die Bedeutung des Modells	82
3.4.2.)	Die Beschreibung des Modells	84
3.4.3.)	Unterschiedliche Erwartungen über die Zentralbankpolitik und ihre Auswirkungen auf das Geschäftsbankenverhalten	88
3.4.4.)	Die Bedeutung der unterschiedlichen Erwartungen für Geschäftsbanken und Zentralbank	99
3.5.)	Geldpolitik bei verzögerter Wirkungsweise	105
3.5.1.)	Die Beschreibung des Modells	105
3.5.2.)	Die optimale Zentralbankpolitik bei verzögerter Wirkungsweise	107
3.6.)	Probleme stochastischer Ansätze	112
3.6.1.)	Das certainty - equivalence Prinzip	112
3.6.2.)	Adaptive Erwartungen bei den Geschäftsbanken - Rationale Erwartungen bei der Zentralbank	117
4.)	Dynamische Modelle mit der expliziten Berücksichtigung zweier Entscheidungseinheiten	123

4.1.)	Spielsituationen als das Ergebnis rationaler Erwartungen der Zentralbank und der Geschäftsbanken	123
4.2.)	Das Modell einer Spielsituation	127
4.3.)	Lösungskonzepte	131
4.3.1.)	Nash-Lösungen	131
4.3.2.)	Minimax-Lösungen	145
4.3.3.)	Stackelberg-Lösungen	149
4.3.4.)	Paretooptimale Lösungen	159
4.3.5.)	Beziehungen zwischen verschiedenen Lösungskonzepten	162
4.4.)	Ein Modell ohne Nash-Lösung und einer Stackelberg-Lösung, die für den Führer ungünstig ist	164
4.5.)	Die Möglichkeit von Täuschungen	168
5.)	Schluß	169
	Anhang I	174
	Anhang II	176
	Anhang III	179
	Anhang IV	185
	Anhang V	189
	Symbolverzeichnis	192

1.) Einleitung: Absichtserklärung und Abgrenzung der Arbeit

Mit zunehmender Kritik an den fiskalpolitischen Konzepten in der Nachfolge von Keynes finden die Möglichkeiten der Geldpolitik wieder erhöhte Beachtung. Die verstärkte Beschäftigung mit Problemen der Geldpolitik und ihre wiedergewonnene Bedeutung bringen es mit sich, daß dieser Gegenstand der Wirtschaftstheorie und Wirtschaftspolitik häufiger debattiert wird. Unterschiedlichste Argumente, Theorien und Standpunkte sind die Folge.

Wesentliche Diskussionen gelten der Wirksamkeit und Optimalität der verschiedenen Konzeptionen der Geldangebotspolitik. Dabei kann man unter verschiedenen Politiken die Verwendung verschiedener Instrumente verstehen, als da sind Diskontpolitik, Mindestreservepolitik und Offenmarktpolitik. Wir beschränken uns in der folgenden Arbeit im wesentlichen auf die Letztgenannte. Andere Politiken werden nur am Rande betrachtet. Unter verschiedenen Politiken verstehen wir vielmehr die unterschiedlichen Einsatzmöglichkeiten eines Instrumentes, also die Frage nach der optimalen Anwendung der Offenmarktpolitik.

Wirksamkeit und Optimalität stehen in engem Zusammenhang. Unter der Voraussetzung, daß ein Instrument überhaupt eine Wirkung auf eine Zielgröße hat, steht nur noch der Grad der Wirksamkeit zur Debatte. Bei der von uns getroffenen Wahl des Optimalitätskriteriums ist die Frage nach dem Grad der Wirksamkeit identisch mit der Frage nach der Optimalität eines Instrumentes.

Damit kommen wir zum Begriff der optimalen Geldpolitik. Die Bestimmung einer optimalen Politik setzt die Kenntnis eines Optimalitätskriteriums voraus und die Möglichkeit, dieses unter gewissen Nebenbedingungen zu beeinflussen. Die Arbeit wird sich damit befassen, das Optimalitätskriterium aufzustellen, die Nebenbedingungen zu formulieren und die unter diesen Umständen optimale Politik zu bestimmen. Dabei wird grundsätzlich unterschieden zwischen statischen und dynamischen Modellen. In beiden Kategorien wird dann insbesondere Wert auf die Berücksichti-

gung des Geschäftsbankensektors gelegt. Auf Probleme stochastischer Modelle wird hingewiesen, ohne daß sie ausführlicher behandelt werden. In der Regel wird die Geldpolitik verwendet zur Steuerung des Volkseinkommens. Dabei werden durchgehend feste Preise angenommen. Es wird jedoch gezeigt, daß die Steuerung der Geldmenge oder gewisser Zinsen in unseren Modellen sehr ähnliche Probleme aufwirft.

2.) Das statische Modell

2.1.) Geldpolitik unter Verwendung des statischen Geldschöpfungsmultiplikators

Der Geldschöpfungsmultiplikator ist die bekannteste Formulierung des Zusammenhangs zwischen Zentralbankgeldangebot und Geldangebot und damit, unter Verwendung des üblichen IS-LM-Schemas, des Zusammenhangs zwischen Zentralbankgeldangebot und Volkseinkommen. Dabei ist der Geldschöpfungsmultiplikator μ im einfachsten Fall eine feste Größe. Das Geldangebot ist damit:

$$M^a = \mu Z^a \tag{2-1}$$

Die Geldnachfrage sei linear abhängig vom Volkseinkommen Y (Transaktionskasse) und vom Zins i (Spekulationskasse), so daß gilt:

$$M^n = h_o Y - h_1 i \quad ; h_o, h_1 > 0 \tag{2-2}$$

Damit ergibt sich als Ort der Geldmarktgleichgewichte die LM-Kurve, die nach dem Zins aufgelöst lautet:

$$i = \frac{h_o Y - \mu Z^a}{h_1} \tag{2-3}$$

Die Gütermarktgleichung ist gekennzeichnet durch eine lineare Konsumfunktion vom Typ der absoluten Einkommenshypothese und eine lineare Investitionsfunktion vom Typ der neoklassischen Investitionstheorie:

(2-4) $C = g_o + g_1 Y \qquad g_o, g_1 > 0$

(2-5) $I = e_o - e_1 i \qquad e_o, e_1 > 0$

(2-6) $Y = C + I$

(2-7) $$Y = \frac{g_o + e_o}{1-g_1} - \frac{e_1}{1-g_1} i$$

(2-7) ist die Gleichung der üblichen IS-Kurve. Die Verbindung zwischen (2-3) und (2-7) ergibt dann den Zusammenhang zwischen der Zentralbankgeldmenge (als Instrumentvariable) und dem Volkseinkommen (als Zielvariable):

(2-8) $$Y = \frac{\frac{g_o + e_o}{1-g_1}}{1 + \frac{h_o e_1}{(1-g_1)h_1}} + \frac{\frac{\mu e_1}{(1-g_1)h_1}}{1 + \frac{h_o e_1}{(1-g_1)h_1}} Z^a$$

oder vereinfachend:

(2-8a) $Y = \delta_o' + \delta_1' Z^a$

Geldpolitik mit dem Ziel der Beeinflussung des Volkseinkommens ist in diesem Modell ohne weiteres möglich, allerdings unter der Voraussetzung, daß die Parameter der Gleichung (2-8) bekannt sind.

Der starre Geldschöpfungsmultiplikator μ gilt nur dann, wenn die privaten Nichtbanken einen festen Bargeldabflußkoeffizienten c

verwirklichen und die Geschäftsbanken immer gerade Reserven in Höhe der Mindestreserveverpflichtung halten. Dieses Verhalten kann folgendermaßen begründet werden[1]: Die Banken erhalten Zentralbankgeld (Reserven), das sie zu einem Zins r_B ausleihen. Nehmen wir der Einfachheit halber an, daß die privaten Nichtbanken kein Zentralbankgeld halten und auch sonst keine Aktiva außer Einlagen. Somit werden die Kredite wieder als Einlagen bei der Bank auftreten. Davon wird ein Teil (gemäß der Mindestreservepflicht) zurückbehalten, der Rest wieder als Kredit vergeben etc. Für das Ende dieses Prozesses gibt es zwei Möglichkeiten:

a) Den Fall des Geldschöpfungsmultiplikators; für c = 0 ist $M = \frac{1}{\iota} Z^a$ die Beziehung zwischen Geldmenge und Zentralbankgeldmenge mit dem Mindestreservesatz ι und dem Bargeldabflußkoeffizienten c = 0. Die Banken erreichen ihr Gewinnmaximum nicht.

b) Die Banken erreichen ihr Gewinnmaximum. In einem Bankensystem mit vollkommener Konkurrenz ist das bei Grenzkosten gleich Grenzerlös der Fall. Unter Vernachlässigung fixer Kosten, Personalkosten etc. ist der Gewinn der Bank definiert als:

$$G = r_B B - r_D D = r_B(1-\iota)D - r_D D$$

mit r_B: Kreditzins , r_D: Einlagezins
B: Kredite , D: Einlagen
ι: Mindestreservesatz

Aus Gewinnmaximierungsgründen ist klar, daß nur Reserven in Höhe der Mindestreserven gehalten werden. Die Maximumbedingung ist dann:

---

1) Diese Begründung gibt im Kern J. Tobin (1967). Ähnliche Überlegungen zum Geldschöpfungsprozess bei R. Towey (1974).

$$\dot{G} = r_B(1-\iota) - r_D = 0$$

Solange nun noch $r_B(1-\iota) > r_D$, werden die Banken versuchen, ihre Einlagen auszudehnen[1]. D kann jedoch wegen a) maximal bis $\frac{1}{\iota} Z$ ausgedehnt werden. Die Theorie des Geldschöpfungsmultiplikators geht nun davon aus, daß der Fall a) die Begrenzung darstellt. Tobin schreibt dazu: "When reserve requirements ... are effective, the marginal yield of bank loans and investments exceeds the marginal cost of deposits to the banking system. In these circumstances additional reserves make it possible and profitable for banks to aquire additional earning assets[2]". Was spricht für diese Annahme, daß $D_{max} < D_{opt}$? Unter der Annahme, daß die privaten Nichtbanken nur die Anlage in Einlagen kennen (oder Einlagen und Zentralbankgeld in festem Verhältnis zu den Einlagen) führt eine Erhöhung des Einlageangebotes nicht zu steigenden Einlagezinsen, sondern zu einer steigenden Nachfrage nach Einlagen, solange die privaten Nichtbanken noch Zentralbankgeld besitzen (bzw. mehr Zentralbankgeld als sie zu besitzen wünschen). Der Prozeß bricht dann ab, wenn die privaten Nichtbanken kein Zentralbankgeld mehr besitzen (bzw. gerade die gewünschte Höhe). Das ist aber auch die Situation, in der die Banken keine Kredite mehr vergeben können, weil das Zentralbankgeld voll zu Reservezwecken gebunden ist (bzw. zu Reservezwecken und zur Befriedigung der Bargeldhaltung der privaten Nichtbanken). Der Bondzins r_B wird durch eine Ausweitung des Kreditangebots nicht so stark gesenkt, daß der Ausgleich $r_B(1-\iota) = r_D$ noch vor D_{max} erreicht wird. Das Konzept des Geldschöpfungsmultiplikators stellt sich somit als eine Ungleichgewichtstheorie dar. Dies ist die Begründung dafür, daß eine Variation von Z^a (hier insbesondere eine Ausweitung) für das Geldangebot in vorgegebener Weise wirksam wird.

Unter Berücksichtigung von Unsicherheit und Transaktionskosten für

---

1) Im Falle, daß r_B und r_D als Konstante anzusehen sind, das heißt nicht von D abhängen, kann die Maximumbedingung nicht erfüllt werden. Dieser Fall interessiert uns nicht.

2) J. Tobin (1967), S. 8

die Banken, ist es unter gewissen Bedingungen nicht optimal nur die Mindestreserven zu halten, vielmehr empfiehlt es sich, in bestimmtem Umfang Überschußreserven nachzufragen[1]. Die Höhe der zu haltenden Überschußreserven wird durch Alternativkostenüberlegungen bestimmt, die im einfachen IS-LM-Modell durch i gekennzeichnet sind. Damit gilt, daß nicht mehr der Mindestreservesatz ι die Reserven der Banken bestimmt, und folglich auch nicht mehr den Geldschöpfungsmultiplikator, sondern der Reservesatz $\iota^*(i) > \iota$[2]. Für den neuen Geldschöpfungsmultiplikator $\mu^*(i)$ gilt $\frac{d\mu^*}{di} > 0$ und für das Geldangebot:

$$M^a = \mu^*(i)\, Z^a$$

und

$$\frac{dM}{dZ} = \underbrace{\frac{d\mu^*}{di}\,\frac{di}{dZ}}_{(-)}\, Z + \underbrace{\mu^*}_{(+)}$$

Dabei muß aber immer gelten, daß das positive Vorzeichen überwiegt, aus folgender Überlegung: Eine Ausweitung der Zentralbankgeldmenge Z (der analoge Schluß gilt für eine Minderung) führt nur dann zu einer Senkung des Zinses i, wenn M^a durch Z ausgeweitet wird. Im Extremfall kann hier allerdings die Wirkung einer Zentralbankgeldausweitung verschwinden. Im allgemeinen kann gesagt werden, daß in einem Modell mit μ^* die Wirkungen einer Zentralbankgeldvariation abgeschwächt werden gegenüber einem Modell mit μ.

2.2.) Kritik am Konzept des statischen Geldschöpfungsmultiplikators

Die Wirkung einer Zentralbankgeldmengenänderung mit Hilfe des Geldschöpfungsmultiplikators darzustellen ist in mehrfacher Hinsicht unbe-

---

1) Allgemein handelt es sich hier um eine Frage des optimalen Portefeuilles bei Unsicherheit. Für eine ausführliche Behandlung etwa J. Tobin (1958).

2) Richter, Schlieper, Friedmann (1975), S. 374-378.

friedigend. Das soll mit einigen kurzen Erläuterungen demonstriert werden.

Eine Ausdehnung der Zentralbankgeldmenge (analoges gilt für eine Einschränkung solange das Mindestreservegebot nicht verletzt wird) durch Offenmarktpolitik mit den Banken führt unmittelbar zu einer Zunahme der Überschußreserven (der gleiche Effekt ist mit einer Variation der Mindestreservesätze zu erzielen). Gewinnüberlegungen entscheiden nun darüber, wie die Geschäftsbanken sich in der Folge verhalten werden. Der oben geschilderte Geldschöpfungsmultiplikator unterstellt einen sofortigen Abbau der Überschußreserven und eine parallele Zinssenkung mit dem Ergebnis, daß in jedem Augenblick ein Gleichgewichtszinssatz herrscht, die Banken die dazu gehörenden optimalen Überschußreserven halten (bzw. sofort keine mehr halten), und das von der Zentralbank gewünschte Geldangebot sich sofort einstellt. Bekanntlich ist dies eine Idealvorstellung. Gerade die Wirkungsverzögerungen der Geldpolitik sind Gegenstand umfangreicher Debatten [1]. Nach den Ursachen solcher Verzögerungen ist zu fragen und ihnen in Modellformulierungen gerecht zu werden.

Wie bereits erwähnt, führt eine expansive Offenmarktpolitik (oder Mindestreservepolitik) in der vereinfachten Darstellung zunächst zum Aufbau von Überschußreserven, die abzubauen Ziel der Geschäftsbanken ist. Daraus ergibt sich die zusätzliche Vergabe von Krediten und die Bildung von neuen Einlagen. Dies erfordert Zeit und Ressourcen. Demgegenüber stehen erhöhte Gewinne, die sich aus einem vorteilhafteren Portefeuille ergeben. Diese beiden Aspekte gegeneinander abzuwägen ist Aufgabe einer optimalen Bankpolitik. Trägt man diesen Umständen Rechnung, dann wird es nicht mehr genügen, sich auf Zeitpunktbetrachtungen zu beschränken. Interessant ist vielmehr der Vergleich zwischen Gewinnen und Kosten über einen gewissen Zeithorizont. Heutige Entscheidungen bzw. Folgen heutiger Entscheidungen sind hier von vergangenen und zukünftigen Entwicklungen, insbesondere von der Zen-

1) Als Beispiele: M. Friedman (1969) und J. Kareken and R. Solow (1963)

tralbankpolitik, abhängig.

Bei der Betrachtung des Geldschöpfungsmultiplikators mit Überschußreserven haben wir bemerkt, daß die Geschäftsbanken auf die von der Zentralbank provozierte Veränderung der Überschußreserven gemäß der Gewinnmaximierungsüberlegung reagieren und den Geldschöpfungsmultiplikator beeinflussen. Hat die Zentralbank bei ihrer Politik ein bestimmtes Ziel vor Augen, so wird sie diese Reaktion der Geschäftsbanken zu berücksichtigen haben, also auf die Aktion der Geschäftsbanken wiederum reagieren müssen. Diese Bemerkungen deuten darauf hin, daß der Prozeß der Geldschöpfung im Kern eine Spielsituation beinhaltet. Diesem Aspekt wurde in der Vergangenheit bei der Geldschöpfungstheorie keine Beachtung geschenkt.

Die nachfolgenden Abschnitte wollen zum einen diese Spielsituation verdeutlichen und Lösungsvorschläge geben, zum anderen Probleme diskutieren, die sich für die Zentralbankpolitik ergeben, wenn der statische Rahmen verlassen wird, und Lösungen für diese Situationen anbieten.

2.3.) Das einfachste Modell einer Spielsituation mit Zentralbankgeld und Bonds

2.3.1.) Die Herleitung des Modells

Unser Modell enthält die drei Sektoren:

- -) private Nichtbanken
- -) Geschäftsbanken
- -) Zentralbank

Der Sektor private Nichtbanken ist zunächst noch in private Schuldner und private Gläubiger aufgeteilt[1]. Die privaten Schuldner besitzen

---

1) Das Modell entspricht in wesentlichen Punkten einem Modell von Brainard (1964). Das Modell von Brainard enthält zudem noch finanzielle Mittler. Die weiteren Betrachtungen weichen jedoch völlig von denen Brainards ab.

kein Eigenkapital. Sie bieten Bonds an (B^a) und fragen Kapital nach (K_1^n). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird angenommen, daß als Bondnachfrager nur Zentralbank und Geschäftsbanken in Frage kommen, also keine direkten Kreditbeziehungen zwischen privaten Schuldnern und privaten Gläubigern bestehen. Die privaten Gläubiger besitzen Eigenkapital. Dies wird als Kapitalangebot (K^a) interpretiert. Die Nachfrage der privaten Gläubiger umfaßt Zentralbankgeld (Z_p^n), Einlagen (D^n) und Kapital (K_2^n):

private Schuldner	
K_1^n	B^a

private Gläubiger	
Z_p^n	K^a
D^n	
K_2^n	

Das konsolidierte Konto des Sektors private Nichtbanken lautet dann:

private Nichtbanken		
($K_1^n+K_2^n=$)	K^n	B^a
	Z_p^n	K^a
	D^n	

Die Zentralbank bietet Zentralbankgeld an (Z^a) und fragt Bonds nach (B_{ZB}^n)

Zentralbank	
B_{ZB}^n	Z^a

Die Geschäftsbanken bieten Einlagen an (D^a). Dabei wird nicht zwischen Sichteinlagen, Termineinlagen und Spareinlagen unterschieden. Man kann allerdings D als die Zusammenfassung all dieser Einlagearten verstehen und den Zins r_D dann als gewichtetes Mittel der Zinsen aller Einlagearten verstehen. Weiterhin fragen die Geschäftsbanken Zentralbankgeld gerade in der Höhe der Mindestreserve nach ($Z_B^n = \iota D$) und Bonds unter Berücksichtigung der Bilanzrestriktion.

Geschäftsbanken	
$(Z_B^n=)$ ιD	D^a
$(B_B^n=)$ $(1-\iota)$ D	

Jetzt sind die Nachfrage- und Angebotsfunktionen für die einzelnen Titel zu bestimmen. Wir unterscheiden dabei drei unterschiedliche Kategorien:

a) Die exogen vorgegebene Größe K^a
b) Die endogen zu bestimmenden Größen K_2^n, B^a, D^n, Z_p^n
c) Die im weiteren Verlauf der Untersuchung der Zentralbank bzw. den Geschäftsbanken zugeordneten Instrumentvariablen Z^a bzw. D^a.

Während es üblich ist, Z^a als Instrumentvariable der Zentralbank anzusehen, bedarf die Verwendung von D^a als Instrumentvariable einer Erklärung. Will man die Rolle des Bankenverhaltens bei der Geldschöpfung genauer betrachten, dann ist unter anderem die Marktform bzw. das Marktverhalten des Bankensektors zu spezifizieren. Die Theorie des Geldschöpfungsmultiplikators geht von vollkommener Konkurrenz im Bankensektor aus, mit dem Ergebnis, daß die Rolle der Banken nur ungenügend gewürdigt wird. Wir gehen hier von der Annahme aus, daß das Bankensystem bezüglich des Einlageangebotes monopolistisch auftritt. Das optimale Einlageangebot wird gemeinsam bestimmt. Dies ist der einfachste, wenn auch nicht der einzige Fall bei

der Formulierung einer Spielsituation. Es stehen jetzt die Möglichkeiten einer Mengen- oder Preispolitik zur Auswahl. Diese Unterscheidungen sind jedoch rein technischer Natur. Wir verwenden die Formulierung der Mengenpolitik, wobei wir zwischen Einlageangebot und Bondsnachfrage der Banken wählen können. Beide Instrumente sind, wie man aus der Bilanz der Geschäftsbanken sieht, einander äquivalent, da die Größe ι nicht von den Geschäftsbanken bestimmt wird. Im folgenden wird (vor allem aus schreibtechnischen Gründen) D^a als Instrumentvariable der Geschäftsbanken gewählt.

Für die endogen zu bestimmenden Größen K_2^n, B^a, D^n und Z_p^n liegen Überlegungen des Sektors private Nichtbanken zugrunde. Die jeweiligen Nachfrage- und Angebotsfunktionen sind von den Zinsen abhängig. Im einzelnen wird angenommen, daß der eigene Zins positiv wirkt, wenn es sich um eine Forderung handelt (D^n,K^n), und negativ bei Verbindlichkeiten (B^a). Die Zinsen alternativer Anlagen haben ein negatives Vorzeichen. Das Bondsangebot der privaten Schuldner dient der Finanzierung der Kapitalnachfrage. Daher wirkt der Kapitalzins r_K positiv auf B^a. Somit gilt:

(2-9) $$Z_p^n = Z_p^n \ (\bar{r}_D, \bar{r}_K)$$

(2-10) $$D^n = D^n \ (\overset{+}{r}_D, \bar{r}_K)$$

(2-11) $$K_2^n = K_2^n \ (\bar{r}_D, \overset{+}{r}_K)$$

(2-12) $$B^a = B^a \ (\overset{+}{r}_K, \bar{r}_B)$$

Die Zeichen über den einzelnen Zinsen geben die Wirkungsrichtung einer positiven Veränderung auf die zu bestimmende Variable an. Für die weitere Betrachtung werden die Be-

ziehungen (2-9) bis (2-12) linear angenommen[1]. Dann gilt (für $a_{ij} > 0$)[2]:

(2-9a) $Z_p^n = - a_{11} r_D - a_{12} r_K + a_{14}$

(2-10a) $D^n = a_{21} r_D - a_{22} r_K + a_{24}$

(2-11a) $K_2^n = - a_{31} r_D + a_{32} r_K + a_{34}$

(2-12a) $B^a = a_{42} r_K - a_{43} r_B + a_{44}$

Die Vorzeichen der Zinsen wurden schon begründet. Für die absoluten Glieder müssen weitere Überlegungen angestellt werden. Das jeweilige absolute Glied gibt die Nachfrage bzw. das Angebot bei Nullzinsen an. Sind also z.B. r_D und r_K null, dann ist $Z_p^n = a_{14}$, $D^n = a_{24}$, $K_2^n = a_{34}$. Da auf der Passivseite der privaten Gläubiger K^a steht, muß $a_{14} + a_{24} + a_{34} = K^a > 0$ sein. Die Frage ist, ob es sinnvoll ist unter der Annahme rationalen Verhaltens der privaten Nichtbanken diese Vorzeichen gelten zu lassen, also etwa mit einer positiven Einlagenachfrage oder Kapitalnachfrage zu rechnen, wenn die jeweiligen Zinsen null sind. Unter der Annahme, daß Kasse (also Z) risikolos ist, bzw. ein geringeres Risiko trägt als die anderen Anlagemöglichkeiten, und der Annahme, daß die privaten Gläubiger eine Aversion gegen das Risiko besitzen, ist dieses Vorzeichen nicht möglich. Dort gilt, unter der Annahme, daß D^n und K^n nicht negativ sein können, a_{24} und a_{34} gleich null und damit $a_{14} = K^a > 0$. Für ein $r_D = 0$, $r_K > 0$ ergäbe sich jedoch im Falle der linearisierten Funktionen für D^n ein negativer Wert. Unter der Annahme, daß die privaten Gläubiger Sympathie für das Risiko besitzen, ist dagegen auch bei einem $r_D = r_K = 0$ die Nachfrage nach Einlagen und Kapital positiv[3]. Entscheidende Bedeutung kommt

---

1) Leitet man diese Beziehungen aus Nutzenmaximierungsüberlegungen ab, dann sind sie nicht linear. Vgl. J. Tobin (1958). Wir können aber davon sprechen, daß die Beziehungen (2-9) bis (2-12) linearisiert werden.

2) Es ist folgender Umstand zu beachten: Eine Veränderung von r_D darf insgesamt die Nachfrage nicht verändern. D.h., einer Erhöhung von D^n, durch r_D verursacht, müssen Senkungen von Z_p^n und K_2^n, durch r_D verursacht, entsprechen. Daraus folgt $a_{21} \geq a_{11}$.

3) Vgl. J. Tobin (1958), S.17 .

diesen Annahmen bei Berechnung der Zinsen r_D, r_K, r_B zu. Später zeigt sich, daß bei der Lösung nach r_K die Annahme $a_{24} = a_{34} = 0$ gegenüber $a_{24} \neq 0$, $a_{34} \neq 0$ keine Änderung des Vorzeichens des absoluten Gliedes der Lösung (α_{02}) liefert, während im Falle $a_{24} > 0$ es zu einer Nichteindeutigkeit des absoluten Gliedes bei der Lösung nach r_D (α_{01}) kommen kann. Es wird aber durchweg angenommen, daß das absolute Glied der Lösung $\alpha_{01} > 0$ ist. Das stimmt sowohl mit $a_{24} > 0$ als auch mit $a_{24} = 0$ überein, solange nur $a_{22}\, a_{43}\, a_{14} > a_{12}\, a_{43}\, a_{24}$ ist[1]. Die analoge Überlegung gilt für $B^a = a_{42}\, r_K - a_{43}\, r_B + a_{44}$. Auch bei der Beziehung für r_B führt die Annahme $a_{44} = 0$ zum eindeutigen Vorzeichen $\alpha_{03} > 0$. Jedoch auch bei $a_{44} > 0$ (und $a_{24} > 0$) wird angenommen, daß $\alpha_{03} > 0$ ist[1].

Nach der Herleitung der Angebots- und Nachfragebeziehungen müssen nun die Marktgleichungen dargestellt werden. Unter Berücksichtigung der Bilanzgleichungen ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
K_2^n\,(\bar{r}_D, \overset{+}{r}_K) + B^a\,(\overset{+}{r}_K, \bar{r}_B) &= K^a && \text{(Kapitalmarkt)}\\
Z_p^n\,(\bar{r}_D, \bar{r}_K) + \iota D^a &= Z^a && \text{(Zentralbankgeldmarkt)}\\
-B^a\,(\overset{+}{r}_K, \bar{r}_B) + (1-\iota)\,D^a &= -Z^a && (\equiv -B_{ZB}^n) \quad \text{(Bondsmarkt)}\\
-D^a + D^n\,(\overset{+}{r}_D, \bar{r}_K) &= 0 && \text{(Einlagemarkt)}
\end{aligned}
\qquad (2\text{-}13)
$$

Die Addition der vier Marktgleichungen ergibt:

$$K_2^n + Z_p^n + D^n = K^a$$

Dies ist aber die Budgetgleichung der privaten Gläubiger; die erste Gleichung von (2-13) ist eine Linearkombination der drei letzten, linear unabhängigen. Darum werden wir in Zukunft die Gleichung des Kapitalmarktes unberücksichtigt lassen. Wir haben also drei Gleichungen

---

1) Die Annahme, daß $\alpha_{01} > 0$, $\alpha_{03} > 0$ stimmt auch mit der Herleitung im Falle nichtlinearisierter Beziehungen (2-9) bis (2-12) überein. Auch ergeben sich nur unter dieser Annahme etwa für r_B positive Werte.

und drei Unbekannte r_D, r_K, r_B. Unter Einsetzen der Beziehungen (2-9a), (2-10a) und (2-12a) kann (2-13) nach den Unbekannten gelöst werden, und es ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} r_D \\ r_K \\ r_B \end{pmatrix} = -\frac{1}{a_{43}(a_{11}a_{22}+a_{21}a_{12})} \begin{pmatrix} a_{22}a_{43}, & 0 & ,-a_{12}a_{43} \\ a_{21}a_{43}, & 0 & ,a_{11}a_{43} \\ a_{21}a_{42}, & -(a_{11}a_{22}+a_{21}a_{12}), & a_{11}a_{42} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z-\imath D-a_{14} \\ a_{44}-(1-\imath)D-Z \\ D-a_{24} \end{pmatrix}$$

(2-14) $$r_D = -\frac{1}{A}\{a_{22}a_{43}Z-(\imath a_{22}a_{43}+a_{12}a_{43})D-a_{22}a_{43}a_{14}+a_{12}a_{43}a_{24}\}$$

(2-15) $$r_K = -\frac{1}{A}\{a_{21}a_{43}Z+(a_{11}a_{43}-a_{21}a_{43}\imath)D-a_{14}a_{21}a_{43}-a_{11}a_{43}a_{24}\}$$

(2-16) $$r_B = -\frac{1}{A}\{(a_{21}a_{42}+a_{11}a_{22}+a_{21}a_{12})Z+((1-\imath)(a_{11}a_{22}+a_{21}a_{12})+ a_{11}a_{42}-a_{21}a_{42}\imath)D-a_{21}a_{42}a_{14}-a_{44}(a_{11}a_{22}+a_{21}a_{12}-a_{11}a_{42}a_{24})\}$$

mit $A = a_{43}(a_{11}a_{22}+a_{21}a_{12})$.

Es wird angenommen, daß gilt $a_{11}-a_{21}\,\imath > 0$. Daraus folgt:

(2-14a) $$r_D = \alpha_{01} - \alpha_{11} Z + \alpha_{21} (\imath)D$$

(2-15a) $$r_K = \alpha_{02} - \alpha_{12} Z - \alpha_{22} (\imath)D$$

(2-16a) $$r_B = \alpha_{03} - \alpha_{13} Z - \alpha_{23} (\imath)D$$

wobei $\alpha_{ij} > 0$ und $\frac{d\alpha_{21}}{di} > 0$, $\frac{d\alpha_{22}}{di} < 0$, $\frac{d\alpha_{23}}{di} < 0$ sind.

Die Verbindung des bisherigen Modells zum Gütermarkt wird durch den üblichen IS-Ansatz hergestellt:

(2-4) $C = g_o + g_1 Y$

(2-5a) $I = e_o - e_1 r_K$ [1)]

(2-6) $Y = C + I$

(2-7a) $Y = \frac{g_o + e_o}{1-g_1} - \frac{e_1}{1-g_1} r_K$

und in Verbindung mit (2-15a) ist:

(2-17) $Y = \frac{g_o + e_o}{1-g_1} - \frac{e_1}{1-g_1} (\alpha_{02} - \alpha_{12} Z - \alpha_{22} (i)D)$

oder

(2-17a) $Y = \delta_o + \delta_1 Z + \delta_2 (i)D$ mit $\frac{d\delta_2}{di} < 0$.

Die Beziehung (2-17a) verdeutlicht in unserem Modell die Einflußmöglichkeiten der Zentralbank und der Geschäftsbanken auf die Höhe des Volkseinkommens. Der Vergleich zwischen (2-17a) und (2-8a) stellt den Unterschied der beiden Modelle klar. Während bei (2-8a) unter Kenntnis von δ_0' und δ_1' alleine die Zentralbank über Z^a das Volkseinkommen beeinflussen kann, wirken in (2-17a) Z und D nebeneinander auf das Volkseinkommen. Der Einfluß von D erfolgt allerdings

---

1) Gegenüber dem einfachen IS-LM-Modell haben wir nun die drei Zinsen r_B, r_D, r_K. Für das Investitionsverhalten ist dabei der Kapitalzins r_K entscheidend. Wir folgen damit der Tobinschen Auffassung der Investitionsfunktion, wie sie z.B. dargestellt wird in W. Brainard und J. Tobin (1968), S. 104."Investment is stimulated when capital is valued more highly in the market then it costs to produce it, and discouraged when its valuation is less than its replacement cost. Another way to state the same point is to say, that investment is encouraged when the market yield on equiety r_K is low relative to the real returns to physical investment". r_K ist dabei mit unserem r_K identisch. Statt der inversen Beziehung

über einen Koeffizienten δ_2 der von dem Mindestreservesatz ι abhängt. Diesen bestimmt die Zentralbank. Wie das zu bewerten ist, wird später behandelt. Zunächst muß das Modell um Regeln vervollständigt werden, die angeben, wie Zentralbank und Geschäftsbanken ihre Instrumentvariablen einsetzen. Dazu benötigen wir Zielfunktionen für beide Institutionen. Im Fall des Geldschöpfungsmultiplikators wird Z so gewählt, daß ein Zielwert für das Volkseinkommen Y erreicht wird. Da dieses Y ohne weiteres erreicht werden kann, war dort eine ausführliche Formulierung einer Zielfunktion nicht notwendig. Im jetzigen Modell scheint es nicht mehr selbstverständlich, daß die Zentralbank das von ihr gewünschte $Y = Y^*$ erreicht. Dabei soll Y^* z.B. das Vollbeschäftigungseinkommen darstellen. Abweichungen vom Zielwert Y^* werden der Einfachheit halber nach oben und nach unten gleich hoch bewertet[1]. Dazu bietet sich eine quadratische Funktion an. Neben dem Zielwert Y^* soll die Zentralbank auch einen Zielwert für ihr Zentralbankgeldangebot besitzen, den wir mit Z^* bezeichnen. Abweichungen von diesem Wert werden ebenfalls quadratisch bewertet. Das Ziel der Zentralbank besteht jetzt darin, den Ausdruck

$$K_{ZB} = k_1 (Y^*-Y)^2 + k_2 (Z^*-Z)^2 \tag{2-18}$$

zu minimieren. Wir bezeichnen (2-18) besser als Kostenfunktion. Die Kosten sind null wenn $Y = Y^*$ und $Z = Z^*$ ist. Der Ausdruck $k_1 (Y^*-Y)^2$ steht für die Kosten der Zieldivergenz, der Ausdruck $k_2 (Z^*-Z)^2$ steht für die Interventionskosten der Zentralbank. Die Bedeutung der Größe Z^* ist im statischen Modell nicht so klar wie sie in späteren dynamischen Modellen sein wird[2]. Betrachtet

---

1) Wenn $Y > Y^*$ so wird das im Festpreismodell allgemein als Gefährdung der Preisstabilität interpretiert. Das Ziel Y^* steht damit nicht unbedingt nur für Vollbeschäftigung, sondern auch für Preisstabilität. Daß Schwankungen nach oben und nach unten gleich bewertet werden, ist dabei für die technische Seite von Bedeutung, die dann einfacher zu handhaben ist. Im statischen Teil wäre jedoch eine Abwandlung ohne weiteres möglich. Im dynamischen Teil wäre eine Behandlung unterschiedlicher Gewichtungen schwieriger, jedoch auch nicht ausgeschlossen. Eine Methode für eine derartige Behandlung gibt: B. Friedman (1975a), Chapter 7.

2) Bei dynamischen Modellen ist die Berücksichtigung von Z in der Kostenfunktion aus Gründen der Instrumentenstabilität wichtig.

man z.B. Z^* als das Z der Vorperiode, so kann man leicht Argumente dafür finden, daß große Schwankungen im Zentralbankgeldangebot, wie sie durch die Abweichungen (Z^*-Z) dargestellt werden, unerwünscht sind.

Für die Geschäftsbanken wird angenommen, daß sie ihren Gewinn maximieren wollen, und zwar wegen der angenommenen Struktur des Bankensystems, den gesamten Gewinn. Dabei werden Kosten, die sich nicht unmittelbar aus der Einlagenbildung ergeben, vernachlässigt. Damit gilt:

$$G_B = r_B B - r_D D = r_B\,(1-\iota)\,D - r_D D \tag{2-19}$$

Mit (2-14) und (2-16) ergibt sich aus (2-19):

$$G_B = (\alpha_{03}(1-\iota)-\alpha_{01})D + (\alpha_{11}-\alpha_{13}(1-\iota))Z\cdot D - (\alpha_{23}(\iota) + \alpha_{21}(\iota))D^2 \tag{2-20}$$

Damit ist unser Modell mit den beiden Zielfunktionen (2-18) und (2-20) und der Gleichung (2-17a), die eine Nebenbedingung darstellt, vollständig. Wir können zur Anwendung des Modells kommen.

2.3.2.) Die Anwendung des Modells

Beide Agenten suchen jetzt ihre Zielfunktion zu minimieren bzw. zu maximieren unter Berücksichtigung der Nebenbedingung an geeigneter Stelle. Da diese jeweiligen Optimierungen nicht unabhängig vom Verhalten des anderen Agenten durchzuführen sind, müssen

auch dessen Handlungen berücksichtigt werden. Das geschieht je nach Lösungskonzept in unterschiedlicher Weise. Unser Modell stellt, wie nun klar ist, die Situation eines Duopols dar und wird in diesem Sinne zu lösen sein.

Zunächst die Cournot-Lösung, oder aus spieltheoretischer Sicht die Lösung als ein Nash-Gleichgewicht. Dazu müssen die Reaktionsfunktionen von Zentralbank und Geschäftsbanken dargestellt werden. Die Reaktionskurve der Zentralbank erhält man durch die Minimierung von (2-18) bezüglich des Instrumentes Z unter der Nebenbedingung (2-17a):

$$(2\text{-}21) \qquad Z = -\frac{k_1\delta_1\delta_2(1)}{k_2+k_1\delta_1^2}\,D + \frac{k_1\delta_1\delta_0 - k_2Z^*-k_1\delta_1Y^*}{k_2+k_1\delta_1^2}$$

Die Funktion ist geometrisch im Z-Y-Diagramm dargestellt: Das Bild der Nebenbedingung (2-17a) bei verschieden hohen Einlagen ergibt eine Parallelenschar. Das Bild der Kostenkurve (2-18) wird durch ellipsenförmige Isokostenlinien dargestellt. Die Menge der Punkte, in denen die Parallelenschar die Ellipsen tangieren, stellt das Bild von (2-21) dar. In das Z-D-Diagramm übertragen ergibt diese Kurve die Gerade R_{ZB}.

Die Reaktionskurve der Geschäftsbanken erhält man zum Teil durch Maximieren der Zielfunktion (2-20). Da dort das Volkseinkommen nicht auftritt, ist eine Berücksichtigung der Nebenbedingung (2-17a) nicht erforderlich:

$$(2\text{-}22) \qquad D = \frac{\alpha_{11} - \alpha_{13}(1-\iota)}{2(\alpha_{23}(\iota)+\alpha_{21}(\iota))}\,Z + \frac{(\alpha_{03}(1-\iota)-\alpha_{01})}{2(\alpha_{23}(\iota)+\alpha_{21}(\iota))}$$

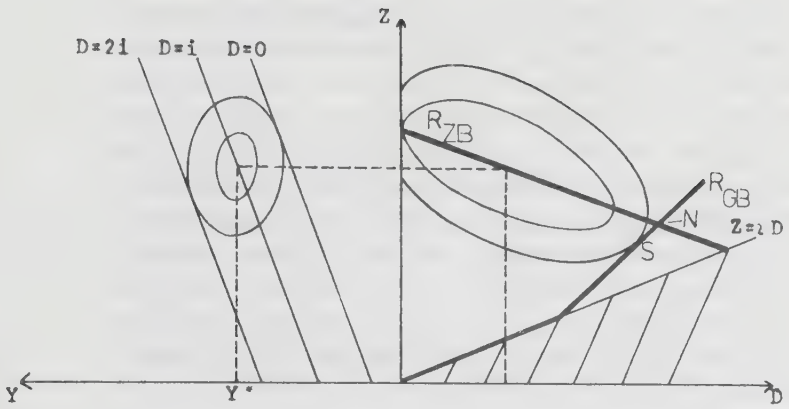


Abb. I

In der Abbildung wird angenommen, daß $\alpha_{03}(1-\iota) - \alpha_{01} > 0$ und $\alpha_{11} - \alpha_{13}(1-\iota) > 0$. Das bedeutet, daß die Geschäftsbanken mit zunehmendem Zentralbankgeld gewillt sind, ihre Einlagen zu erhöhen und daß sie bei einer Zentralbankgeldmenge von null Einlagen anböten, bestünde nicht die Mindestreservepflicht. Weil für den Anstieg von (2-22) gilt:

$$\frac{dD}{dZ} = \frac{\alpha_{11} - \alpha_{13}(1-\iota)}{2(\alpha_{23}(\iota) + \alpha_{21}(\iota))} = \frac{a_{22}a_{43} - (1-\iota)(a_{21}a_{42} + a_{11}a_{22} + a_{21}a_{12})}{2[\iota a_{22}a_{43} + a_{12}a_{43} + (1-\iota)(a_{11}a_{22} + a_{21}a_{12}) + a_{11}a_{42} - a_{21}a_{42}]}$$

$$= \frac{a_{22}a_{43}}{2[\iota a_{22}a_{43} + \ldots]} - \frac{(1-\iota)(\ldots)}{2[\iota a_{22}a_{43} + \ldots]} < \frac{1}{\iota}$$

verläuft (2-22) im Z-D-Diagramm steiler als

(2-23) $\qquad Z = \iota D$

(2-23) stellt die Beschränkung durch die Mindestreservepflicht dar. Sofern die Banken das Mindestreservegebot immer erfüllen, ist der Bereich unterhalb (2-23) als "Spielbereich" ausgeschlossen. Damit gilt (2-22) auch erst ab dem Schnitt mit (2-23) als Reaktionskurve der Geschäftsbanken. Für kleinere Z-und D-Werte ist die Reaktionskurve vielmehr mit (2-23) identisch, da diese unter Beachtung der Mindestreservepflicht der "idealen" Reaktionskurve am nächsten kommt, d.h. den Gewinn unter Berücksichtigung des Mindestreservegebots maximiert. Als Reaktionskurve für die Geschäftsbanken R_{GB} gilt damit die geknickte, dick ausgezogene Linie in Abb. 1. Auch R_{ZB} ist nur im Bereich oberhalb von (2-23) definiert, da auch im Z-Y-Diagramm analog zum Z-D-Diagramm der Bereich, bei dem die Mindestreserve pflicht verletzt ist, ausgespart wird.

Unter den Annahmen der Abbildung[1)] können sich die zwei Reaktionskurven auf dem Bild von (2-23) oder darüber schneiden.

Für die Lösung dieses Duopolproblems ergeben sich nun verschiedene Möglichkeiten. Dazu sollen zunächst die Reaktionskurven interpretiert werden. R_{ZB} gibt an, welchen Wert von Z die Zentralbank wählt, bei einem bestimmten Wert von D. Umgekehrt gibt R_{GB} an, welchen Wert von D die Geschäftsbanken bei einem bestimmten Wert von Z wählen. Unter der Annahme gleich starker Positionen der beiden Spieler, insbesondere der Annahme gleicher Information ,ist der Punkt C, der die Cournotlösung oder das Nashgleichgewicht darstellt, ein sinnvolles Lösungskonzept. Für jeden

---

1) Verwendet man statt der linearen Nachfragefunktionen K_2^n, Z_p^n, D^n nichtlineare Funktionen derart, daß positiv korrelierte Zinsen proportional angenommen werden, negativ korrelierte Zinsen aber umgekehrt proportional, dann müssen sich die zwei Reaktionsfunktionen auf (2-23) oder oberhalb schneiden, da statt (2-22) sich eine Funktion derart ergibt, daß bei $Z = 0$, $D > 0$ ist. Unter plausiblen Annahmen für den Mindestreservesatz ι ergibt sich auch ein positiver Anstieg für diese Funktion.

Spieler bringt ab dem Erreichen von C jede weitere Variation seines Instrumentes eine Verschlechterung seiner Situation. Insofern ist C eine stabile Lösung. Jeder andere Punkt ist dagegen nicht stabil[1].

Unter der Annahme ungleicher Positionen der Spieler, insbesondere ungleicher Informationen, ist diese Lösung weniger einsichtig. Nehmen wir an, die Zentralbank kenne auch die Reaktionskurve des Mitspielers, die Geschäftsbanken jedoch nur die eigene. Bei dieser Konstellation wählt die Zentralbank ihr Instrument Z so, daß ihre Kosten unter Berücksichtigung der Reaktionskurve der Geschäftsbanken R_{GB} minimiert werden (Punkt S in Abb. I und II). Die Lösung muß auf der Reaktionskurve der Geschäftsbanken liegen, da die Geschäftsbanken keinen Punkt außerhalb dieser akzeptieren werden. Diese Lösung wird als Stackelberg-Lösung bezeichnet[2].

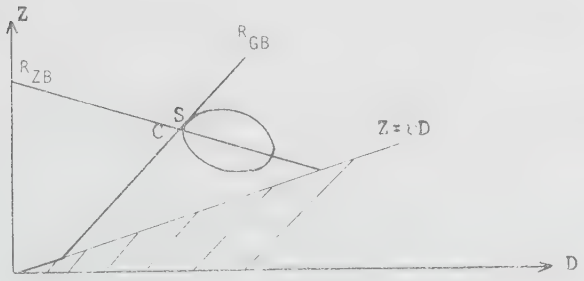


Abbildung II

1) In der Cournot-Lösung wird angenommen, daß jeder Spieler nur die eigene Reaktionskurve kennt. Ein Spieler wählt nun einen Punkt auf seiner Reaktionskurve. Der Mitspieler wird nun sein Instument so wählen, daß er auf seine Reaktionskurve gelangt etc. Dieser Prozeß endet in C. In der statischen Analyse wird angenommen, daß dieser Prozeß in unendlich kurzer Zeit abläuft. Für die Behandlung von solchen Spielen, bei denen dieser Prozeß Zeit erfordert und die somit zu dynamischen Modellen führen: J.W. Friedman (1976). R.M. Cyert und M.H. Groot (1970).

2) Der Name geht auf v. Stackelberg zurück der sich mit derartigen Duopollösungen beschäftigt hat, die bei ihm assymmetrisches Duopol heißen. H. v. Stackelberg (1951), S. 210-218

Beachtet man, daß (in der Zeichnung) der Gewinn der Geschäftsbanken umso größer ist, je nordöstlicher man sich auf R_{GB} befindet, dann zeigt sich, daß in Abbildung I der Punkt S von der Zentralbank dem Punkt C vorgezogen wird, aber die Geschäftsbanken den Punkt C dem Punkt S vorziehen. In Abbildung II dagegen wird S sowohl von Zentralbank und Geschäftsbank dem Punkt C vorgezogen. Es ist damit klar, daß hier die Cournot-Lösung nicht notwendig eine paretooptimale Situation darstellt.

Schneiden sich R_{ZB} und R_{GB} in dem durch (2-23) gekennzeichneten Teil von R_{GB}, dann entspricht die Cournot-Lösung dem Fall des Geldschöpfungsmultiplikators, denn da in diesem Falle die privaten Nichtbanken kein Zentralbankgeld halten, entspricht (2-23) der Geldschöpfungsmultiplikatorgleichung . Dennoch ist natürlich der Charakter dieser Lösung ein anderer als die Geldschöpfungsmultiplikatorlösungen des Abschnitts 2.1.). Hier kann Z nicht wie dort beliebig gewählt werden. Während im Abschnitt 2.1.) das Ziel Y^* immer erreicht werden kann, ist das nun nicht möglich. Eine Lösung C oder S wird nur zufällig dem Optimalpunkt (Z^*,Y^*) entsprechen. Beschränken wir unser Ziel jedoch wie im Abschnitt 2.1.) auf Y^*, so daß $K_{ZB}=k_1(Y^*-Y)^2$, dann sind die zugehörigen Isokostenlinien in Abb.I parallele Geraden. Für jedes D ergibt sich dann ein Z so, daß Y^* erreicht werden kann. R_{ZB} stellt den Ort dar, bei dem Z und D so einander zugeordnet sind, daß immer $Y = Y^*$ gilt. Sind damit die Aussagen des Modells der Spielsituation identisch mit den Aussagen des Modells des Geldschöpfungsmultiplikators? Das kann nicht gesagt werden. So muß z.B. in diesem Modell, selbst wenn nur das Ziel Y^* angestrebt wird, die Zentralbank nicht wie beim Geldschöpfungsmultiplikator nur die Parameter des Multiplikators kennen, sondern die von den Banken gewählten Einlagen, um die dazu passende Zentralbank-

geldmenge anbieten zu können[1].

Weiterhin ist in Fällen, in denen die Zentralbank nur Y^* anstrebt, dieses Y^* nur erreichbar, wenn eine Cournot-Lösung existiert. Das ist in unserem Modell gesichert. Unter der Annahme einer anderen Zielfunktion als (2-20) könnte die Existenz einer Cournot-Lösung gefährdet sein[2]. Unser Spielmodell ist auf jeden Fall allgemeiner als das herkömmliche Modell des Geldschöpfungsmultiplikators.

Kehren wir nun zu unserem ursprünglichen Modell zurück. Wie wir gesehen haben, führt z.B. eine Cournot-Lösung in der Regel nicht zum Punkte (Z^*,Y^*). Es stehen jedoch der Zentralbank weitere Instrumente zur Verfügung, in unserem Modell speziell der Mindestreservesatz ι. Der Einfluß von ι auf die einzelnen Größen des Modells muß nun bestimmt werden:

-) Die Nebenbedingung (2-17a) ändert sich wegen $\delta_2(\iota)$ und damit wegen (2-21) auch der Anstieg von R_{ZB}. Bei einer Mindestreserveerhöhung wird R_{ZB} im Z-D-Diagramm flacher.

-) Die Beziehung (2-23) ändert sich. Bei einer Mindestreserveerhöhung wird ihr Bild im Z-D-Diagramm steiler.

---

1) Wenn in dem Modell Informationslags auftreten, so daß die Zentralbank erst nach ihrer Entscheidung über Z auch D erkennt, wie das in der Realität sein wird, treten hier also Schwierigkeiten auf. Man vergleiche dazu auch den dynamischen Teil.

2) Unter der Annahme, daß (2-9) bis (2-12) außer von den Zinsen auch vom Volkseinkommen abhängt, werden auch (2-14) bis (2-16) vom Volkseinkommen beeinflußt. Damit ergibt sich für eine Zielfunktion der Art (2-19) auch eine Abhängigkeit von Y. Die Reaktionsfunktion der Geschäftsbanken hat dann nicht mehr die einfache Form wie in unserem Modell. Ein besonderer Fall tritt auf, wenn die Geschäftsbanken nicht die Gewinnmaximierung sich zum Ziel setzen, sondern (etwa aus langfristigen Überlegungen) ein $Y^{**} \neq Y^*$ anstreben. Dann ergeben sich im Z-D-Diagramm zwei Parallelen als Reaktionsfunktionen, d.h. also eine Cournotlösung ist ausgeschlossen, nicht aber eine Stackelberglösung, die in diesem Falle allerdings nicht eindeutig ist und den Führer in eine extrem schlechte Lage bringt, da die Stackelberglösung mit der Reaktionskurve des Nachfolgers übereinstimmt.

-) Die Beziehung (2-22) ist im Anstieg und im absoluten Glied von ι abhängig. Die Abhängigkeit ist jedoch nicht eindeutig.

Offensichtlich kann mit einer Variation des Mindestreservesatzes ι der Schnittpunkt der beiden Reaktionsfunktionen beeinflußt werden. Es ist hier durchaus möglich, unter Verzicht einer Variation der Zentralbankgeldmenge Z einen Mindestreservesatz ι so zu wählen, daß das optimale Volkseinkommen Y^* erreicht wird. Mit anderen Worten die Zentralbank kann mit einer Variation des Mindestreservesatzes ihren Optimalpunkt (Z^*,Y^*) erreichen und damit ihre Kosten auf null senken.

Zwei Einschränkungen sind allerdings dabei zu beachten. Die Wahl des Mindestreservesatzes wird vernünftigerweise dadurch eingeschränkt, daß der Gewinn der Geschäftsbank nicht null oder negativ wird, d.h. ι ist durch die Bedingung

$$(\alpha_{03}(1-\iota)-\alpha_{01})D + (\alpha_{11}-\alpha_{13}(1-\iota))\ Z \cdot D$$

$$- (\alpha_{23}(\iota)+\alpha_{21}(\iota))D^2 > 0$$

eingeschränkt.

Eine weitere Voraussetzung, damit wie oben beschrieben verfahren werden kann ist die, daß es keinen exogen vorgegebenen Optimalwert für ι gibt, analog zum Optimalwert Z^* bei der Offenmarktpolitik. Der allgemeinere Fall wäre der, daß es einen Optimalwert von Z, ι und Y gibt und Abweichungen aller drei Größen in einer Kostenfunktion zu berücksichtigen sind[1]. In diesem Fall ist mit der Erweiterung des Instrumentariums eine Verbesserung der Situation für die Zentralbank möglich, jedoch nicht die Möglichkeit

---

1) Für eine Begründung einer derartigen Position vgl. P von zur Muehlen (1976).

den Optimalpunkt, das heißt Kosten von null, zu erreichen.

Zum Abschluß sollen noch zwei alternative Zielfunktionen der Zentralbank behandelt werden[1)2)].

a) Die Geldmenge M:
Die Verbindung zwischen dem finanziellen und dem güterwirtschaftlichen Teil des Modells ist eine besondere Art des Keynes-Effektes. Diese einfache Koppelung ist nicht unumstritten. Wird jedoch ein eineindeutiger Zusammenhang zwischen M und Y unterstellt, dann gibt es zu einem Y^* ein bestimmtes M^*. Es genügt statt Y^* ein M^* als Ziel anzustreben. Man kann sich für diesen Fall auf den finanziellen Teil beschränken. Es gilt:

$$Z_p^n = Z - \iota D$$

$$M = Z_p + D = Z + (1 - \iota) D \tag{2-24}$$

Dann stellt (2-24) die Entsprechung zu (2-17a) dar. (2-18) ist zu ersetzen durch:

$$K_{ZB} = k_1' (M^* - M)^2 + k_2' (Z^* - Z)^2 \tag{2-25}$$

---

1) Es handelt sich um zwei extreme Positionen der Indikatordebatte. Für eine Übersicht M.J. Hamburger (1970).
2) Die neuen Zielvariablen können im großen Rahmen nur als Zwischenziele gesehen werden. Damit erfolgt jetzt eine Zweiteilung des Problems: Zunächst die Bestimmung von M bzw. r_K und mit deren Hilfe dann die Bestimmung des endgültigen Ziels Y^K. Die Zweiteilung ist in unserem Modell ohne weiteres möglich. Wenn aber etwa die Zentralbankgeldnachfrage von Y abhängt, wird sie problematisch. Für eine ausführliche Darstellung dieser Probleme B. Friedman (1975b). Friedman plädiert dabei gegen die "two-stage representation" und für einen "straightforward unified reduced form framework" (vgl. S. 455).

Für dieses abgeänderte Modell gelten die gleichen Aussagen wie für das ursprüngliche Modell. Auch hier ist der Koeffizient von D in (2-24) vom Mindestreservesatz abhängig, so daß hier auch das früher gesagte seine Gültigkeit behält.

b) Der Zins für das Kapital r_K

Eine andere Möglichkeit die Verbindung zum realen Teil auszusparen liegt darin, sich alleine auf die Steuerung von r_K zu beschränken. Die Entsprechung zu (2-17a) und (2-24) ist dann:

(2-15a) $$r_K = \alpha_{02} - \alpha_{12} Z - \alpha_{22} (1) D$$

Die Kostenfunktion für die Zentralbank ist zu setzen als:

(2-26) $$K_{ZB} = k_1'' (r_K^* - r_K)^2 + k_2'' (Z^* - Z)^2$$

2.4.) Die Erweiterung des Modells um Geldmarktpapiere und die Bedeutung für das 'einfachste Modell'.

Die Erweiterung des Modells um Geldmarktpapiere ermöglicht die Aufnahme des Begriffs der freien Liquiditätsreserven in das Modell. Weiter können gewisse Annahmen, die im Modell des Abschnitts 2.3.1.) gemacht wurden, fallen gelassen werden. Zunächst soll aber die Erweiterung des Modells präzisiert werden: Im Modell des Abschnitts 2.3.1.) wurde die Zentralbankgeldmenge dadurch ausgeweitet (bzw. gesenkt), daß die Bondsnachfrage B^n_{ZB} vergrößert (bzw. verringert) wurde. Jetzt wird die Aktivseite der Zentralbankbilanz erweitert um inländische Geldmarktpapiere, im Sinne von Geldmarktverschuldung öffentlicher Haushalte gegen-

über der Zentralbank, $\overline{S}$. Die Zentralbank bietet im Zuge von Offenmarktpolitik davon die Menge S^n_{ZB} an, und zwar sowohl den Geschäftsbanken als auch den privaten Nichtbanken. Die privaten Nichtbanken dehnen deshalb ihre Nachfrage auf Geldmarktpapiere aus, also S^n_p bzw. S^n_{Bk}. Die Bilanzen der drei Sektoren lauten demnach:

private Nichtbanken		Geschäftsbanken		Zentralbank	
K^n	K^a	ιD	D^a	B^n_{ZB}	Z^a
D^n	B^a	S^n_{Bk}		$\overline{S}$	S^a_{ZB}
Z^n_p		B^n_B			
S^n_p					

Die Geldmarktpapiere können jederzeit bei der Zentralbank gegen Zentralbankgeld eingetauscht werden. Deshalb können wir S^n_{Bk} auch als freie Liquiditätsreserven bezeichnen[1]. Weiterhin können die Banken durch Erwerb von S von den privaten Nichtbanken im Austausch gegen D ihre freien Liquiditätsreserven erhöhen, die sie wiederum bei der Zentralbank gegen Zentralbankgeld eintauschen können (und im Umfang $\iota \Delta D$ auch müssen, wobei $\Delta D = \Delta S$). Dieser Effekt hatte im einfachsten Modell seine Entsprechung im Tausch von Zentralbankgeld gegen Einlagen zwischen Banken und Nichtbanken. Diese neue Möglichkeit der Beschaffung von Zentralbankgeld über Geldmarktpapiere hat jedoch folgende Konsequenz: Im einfachsten Modell des Abschnitts 2.3.1.) wurde angenommen, daß die Nichtbanken ihre Zentralbankgeldmenge Z^n_p gemäß der Gewinn-Kosten-Überlegung (2-9) halten. Demgegenüber steht

1) Zum Begriff der freien Liquiditätsreserven in der Bundesrepublik Deutschland: Monatsbericht der deutschen Bundesbank, Juni 1973, S. 47 f.

die Vorstellung, daß die Nichtbanken einen bestimmten Teil des Geldvolumens in Bargeld halten: der Bargeldabflußkoeffizient c. Dann gilt also:

$$c = \frac{Z_p}{Z_p + D}$$

und daraus:

$$Z_p = \frac{c}{1 - c} D$$

Unter diesen Bedingungen gilt für den Markt für Zentralbankgeld:

(2-27) $$Z_p + Z_{Bk} = \left(\frac{c}{1-c} + 1 \right) D = Z^a$$

Die Möglichkeit der Verwendung von D als Instrumentvariable der Geschäftsbanken ist jetzt nicht mehr gegeben, sofern die Zentralbank ihrerseits Z^a als Instrument verwendet, und sich gleichzeitig der Markt für Zentralbankgeld im Gleichgewicht befinden soll. Bei der Erweiterung um Geldmarktpapiere kommt aber der Markt dieser Titel hinzu, d.h.:

(2-28) $$S_p^n (r_D, r_K, r_S) + S_{Bk}^n = S_{ZB}^a$$

mit r_S: Zins für Geldmarktpapiere. Somit können die Banken jetzt S_{Bk}^n als Instrument benutzen. Da der Umtausch von Geldmarktpapieren gegen Zentralbankgeld jederzeit möglich ist, kann die Zentralbank nicht Z und S getrennt steuern, sondern sinnvollerweise nur die Summe Z + S. Die Gleichungen (2-27) und (2-28) werden dann sinnvollerweise zusammengefaßt zu einem Markt für "monetäre Reserven":

(2-29) $$Z_p + \frac{c}{1-c} D + 1D + S_p^n(r_D, r_K, r_S) + S_{Bk}^n = Z + S$$

Es ist jetzt gleichgültig ob D oder $S^n_{Bk} + B^n_{Bk}$ als Instrument gewählt werden, beides ist äquivalent. Wenn D als Instrument weiter benutzt werden soll, dann ist $\tilde{S}^n_{Bk} = S^n_{Bk} + B^n_{Bk}$ so zu wählen, daß dieses D verwirklicht werden kann, also $\tilde{S}^n_{Bk} = \tilde{S}^n_{Bk}(D)$ [1]. Damit hat sich das Modell also im Prinzip nicht geändert. Es steht weiterhin dem einen Instrument der Zentralbank ZS = (Z+S) ein Instrument der Geschäftsbanken (D) gegenüber.

Während im einfachsten Modell die Handlungsfreiheit der Banken erst ab dem Punkt eingeschränkt war, bei dem die Nichtbanken kein Bargeld mehr besaßen, ist im erweiterten Modell die Grenze dann erreicht, wenn sich keine Geldmarktpapiere mehr außerhalb der Zentralbank befinden, also gilt:

$$\left(\frac{c}{1-c} + \iota\right) D = Z^a + S^a \; ; \; S^a = 0$$

Das ist die Analogie zu

$$\iota D = Z^a$$

im einfachsten Modell. Der Koeffizient von D ist in beiden Fällen von den Banken nicht zu beeinflussen. Die Zentralbank kann nun die "Spielsituationen" umso schneller in eine determinierte Situation umwandeln, je geringer die Geldmarkttitel bzw. die Zentralbankgeldmenge (ohne Mindestreserven) außerhalb der Zentralbank sind.

---

1) Erhöhen die Geschäftsbanken D^a, dann ergibt sich eine Steigerung des Zinses r_D und damit eine Zunahme der Nachfrage nach Einlagen von seiten der Nichtbanken. Die Banken müssen nun durch eine geeignete Veränderung von $\tilde{S}^n_{Bk}$ bereit sein die nachlassende Nachfrage der Nichtbanken nach Geldmarktpapieren auszugleichen.

2.5.) Die Aufnahme stochastischer Elemente

Bevor wir zu dynamischen Modellen der Geldpolitik kommen, sollen noch einige Probleme betrachtet werden, die entstehen, wenn in einer oder mehreren Beziehungen Störvariablen auftreten. Selbst im einfachsten Fall des Abschnitts 2.1.) ist in solchen Fällen die Erreichung des Zieles Y^* nicht mehr gesichert, d. h. Abweichungen von Y^* treten auf. Damit diese Abweichungen von Y^* bewertet werden können, muß mit dem Auftreten von Störgliedern schon in diesem Modell eine Zielfunktion oder Kostenfunktion eingeführt werden. Angenommen die Beziehung (2-7) ist um die Störvariable ε_1 erweitert, mit $E(\varepsilon_1) = 0$ und $E(\varepsilon_1^2) = \text{var}\,\varepsilon_1$. Dann ist auch die Größe Y eine stochastische Variable, und die Verwendung einer Kostenfunktion der Art (2-18) ist nicht mehr sinnvoll. Statt dessen wird dann üblicherweise der Erwartungswert der ursprünglichen Kostenfunktion verwendet. In der Literatur beschränken sich dabei die Argumente der Kostenfunktion häufig auf Y und Y^*, d. h. die Verwendung von:

$$(2\text{-}30) \qquad K_{ZB} = E(Y - Y^*)^2 = \text{var}\, Y + (EY - Y^*)^2$$

Gilt nun die Nebenbedingung

$$(2\text{-}8b) \qquad Y = \delta'_0 + \delta'_1 Z^a + \varepsilon_1$$

dann ist $\text{var}\, Y = \text{var}\, \varepsilon_1$ eine Größe, die in der Regel von der Zentralbank nicht beeinflußt werden kann. Das Ziel der Zentralbank kann damit nur sein, die Gleichheit von EY und Y^* herzustellen. Bei einem $E(\varepsilon_1) = 0$ führt das aber zur gleichen Politik wie die Minimierung von

$$(2\text{-}31) \qquad (Y - Y^*)^2$$

unter der Nebenbedingung (2-8a). Die Politik ist die gleiche wie im Falle ohne stochastische Glieder. Dieser Umstand wird als "certainty equivalence" bezeichnet[1]. Die Äquivalenz beschränkt sich aber auf die zu wählende Politik, wobei das Instrument schon ausgewählt wurde, nicht auf die Kosten. Während (2-31) bei der Minimierung null ergibt, bleibt bei der Minimierung von (2-30) immer var Y bestehen.

Derartige Überlegungen werden bei der Behandlung des Instrumentenproblems angestellt. Es geht dort um die Frage, mit welchem Instrument soll die Zentralbank, wenn ihr mehrere Instrumente zur Verfügung stehen, ihr Ziel ansteuern[2]. Im Falle ohne Störglieder sind unter der Annahme der Kostenfunktion (2-31) alle geeigneten Instrumente[3] äquivalent, d. h. es ist beliebig, welches Instrument gewählt wird. Das ist leicht einzusehen, da (2-31) in jedem Fall verschwindet und die Politik selbst keine Berücksichtigung in der Kostenfunktion findet[4]. Im analogen Falle des Modells (2-30) und (2-8b) gilt das nicht mehr, da dann zu jedem Instrument ein anderes var Y gehört. Poole verwendet ein einfaches IS-LM-Modell zur Demonstration dieses Zusammenhanges[5]. Dabei

---

1) Der Begriff der "certainty equivalence" wird von Theil ausführlich behandelt, etwa in H. Theil (1964) S. 54 - 57. Einen analogen Zusammenhang zwischen deterministischen und stochastischen Modellen gibt es auch in dynamischen Systemen. Vergleiche dazu Abschnitt 3.6.1.).

2) Eine Definition in diesem Sinne findet sich bei B. Friedman (1975b), S. 448.

3) Ein geeignetes Instrument ist hier jedes Instrument, das in der Lage ist Y zu beeinflussen. In dynamischen Modellen spricht man von controllability.

4) Eine ausführliche Darstellung dieser Tatsache findet sich z.B. bei B. Friedman (1975b), S. 445-448. Dies ist eine Konsequenz der Theorie der Wirtschaftspolitik, wonach mit einem Instrument ein Ziel erreicht werden kann.

5) W. Poole (1970), S. 197-216. Das Modell ist in seiner deterministischen Variante bis auf die Beziehung (2-1) identisch mit unserem Modell aus 2.1.). Statt (2-1) wird $M^a = M$ verwendet, d. h. also der Geldschöpfungsprozeß wird nicht untersucht. In der stochastischen Variante treten dann sowohl in der IS-Funktion (analog der Beziehung (2-7)), als auch in der LM-Funktion (analog zu (2-3)) Störvariablen auf.

stehen das Geldangebot M (entsprechend wäre dies im Modell des Abschnitts 2.1.) das Zentralbankgeldangebot) und der Zins i als Instrumente zur Verfügung. Es gilt jetzt als optimale Politik in der Regel eine Kombination der möglichen Instrumente, die von den Parametern des Systems und den Eigenschaften der Störvariablen abhängt[1].

Während bei Poole nur additive Störvariablen auftreten, liegt es im Falle des Modells des Abschnitts 2.1.) nahe, auch den Koeffizienten der Zentralbankpolitik δ_1' als eine Zufallsgröße anzusehen. Dies vor allem weil δ_1' den Geldschöpfungsmultiplikator mitenthält. Schwankungen des Reservesatzes ι^* oder des Bargeldabflußkoeffizienten c sind für einen Zufallscharakter von δ_1' verantwortlich. In diesem Fall gilt nicht mehr die "certainty equivalence"[2]. Dies wird ohne weiteres deutlich, wenn man (2-30) in der neuen Interpretation näher betrachtet. Während bis jetzt var Y = var ε_1 galt, ist unter der Annahme von (2-8b), mit δ_1' als Zufallsgröße, die Varianz von Y[3]:

$$\text{var } Y = Z^2 \text{ var } \delta_1' + \text{var } \varepsilon_1$$

Dabei bezeichnet E (δ_1') den Erwartungswert der Zufallsvariablen δ_1', und var δ_1' ihre Varianz. Die Varianz von Y ist jetzt nicht mehr unabhängig von der Wahl der Politik, und es ist nicht mehr optimal, die Politik so zu wählen, daß E Y = Y^*. Die optimale Politik wird abgeleitet, indem zunächst der Erwartungswert von (2-8b) (mit δ_1' als Zufallsgröße) in die Kostenfunktion (2-30) eingesetzt wird, und

1) W. Poole (1970), S. 208 f.
2) Die Einführung stochastischer Koeffizienten in das Problem der statischen Wirtschaftspolitik findet man zum ersten Mal in W. Brainard (1967), S. 411-425. Die folgenden Darstellungen bleiben im Rahmen dieser Arbeit.
3) Im Falle, daß δ_1' und ε_1 miteinander korreliert sind, gilt:

$$\text{var } Y = Z^2 \text{ var } \delta_1' + \text{var } \varepsilon_1 + 2 Z \text{ cov } (\delta_1' \varepsilon_1)$$

der Ausdruck nach der Instrumentvariable Z abgeleitet und null gesetzt wird. Es ergibt sich:

$$(2\text{-}32) \qquad Z^{o} = \frac{\dfrac{Y^{*} - \delta_{o}'}{E\delta_{1}'}}{1 + \dfrac{\operatorname{var} \delta_{1}'}{(E\delta_{1}')^{2}}}$$

als optimale Politik. Der Zähler von (2-32) entspricht der "certainty equivalence" Politik. Der Nenner ist größer als eins. Das heißt, die optimale Politik ist unter diesen Umständen zurückhaltender.

Im Modell des Abschnitts 2.3.) können in mehreren Beziehungen Störglieder auftreten. Führt man normalverteilte additive Störglieder in die Beziehungen (2-9a) bis (2-12a) ein, dann enthalten auch (2-14a) bis (2-16a) normalverteilte Störglieder, die Linearkombinationen der ursprünglichen Störglieder sind. Weiterhin kann in (2-17a) ein Störterm eingeführt werden. Als Kostenfunktion der Zentralbank wird der Erwartungswert der neu zu interpretierenden Beziehung (2-18) verwandt, als Zielfunktion der Geschäftsbanken der Erwartungswert der Funktion (2-20). Die Lösung des Problems ist dank der "certainty equivalence" gleich der Lösung des Problems ohne Störvariable.

3.) Dynamische Modelle mit der expliziten Berücksichtigung einer Entscheidungseinheit.

3.1.) Ansatzpunkte für eine dynamische Formulierung.

Bis jetzt wurde die Geldpolitik im statischen Konzept diskutiert. Jedoch sind gerade bei der Geldpolitik Lags von wesentlicher Bedeutung[1]. Damit ist der Übergang zu dynamischen Theorien erforderlich. Verzögerungen können sowohl beim Gütermarkt, als auch im finanziellen Teil des Modells auftreten. Beim Gütermarkt können sowohl in der Konsumfunktion, als auch in der Investitionsfunktion Verzögerungen vorkommen. Die wirtschaftswissenschaftliche Literatur kennt eine Fülle von Begründungen[2]. Ebenso herrscht kein Mangel an dynamischen Theorien für finanzielle Märkte[3]. Es ist nicht unser Ziel, alle diese Möglichkeiten zu beschreiben und etwa realistisch im Modell abzubilden. Wir sind lediglich daran interessiert, grundsätzliche Probleme zu betrachten, die für eine Geldpolitik in dynamischen Modellen auftreten. Dazu reichen oft die einfachsten Hypothesen über die Verzögerungen. Es werden jedoch auch Lags auftreten, die mit unseren Problemen enger zusammenhängen, etwa solche, die an das zu untersuchende Bankenverhalten geknüpft sind. Auf diese wird näher eingegangen.

---

1) Eine Übersicht der möglichen Verzögerungen in der Geldpolitik findet sich bei E. Dürr (1970).
2) Einen Überblick über dynamische Konsumfunktionen gibt L. Phlips (1974). Für Verzögerungen bei der Investitionsfunktion D.W. Jorgenson (1965), S. 35-92 und in der dort in der Einleitung zitierten Literatur.
3) W. Brainard and J. Tobin (1968), S. 99-122. Ein Modell mit realem und finanziellem Teil, wobei in beiden Verzögerungen vorkommen, ist das FRB-MIT-Modell. Dazu gibt es mehrere Veröffentlichungen, z.B. R. Rasche (1973), S. 1-25 und die dort angegebene Literatur.

Verzögerungen können aus verschiedenen Gründen auftreten:

a) Anpassungsverzögerungen
b) Informationsverzögerungen
c) Verzögerungen aus der Erwartungsbildung
d) Entscheidungsverzögerungen

Die Anpassungsverzögerungen können dabei noch unterteilt werden in solche, die fest vorgegeben sind, und solche, die durch die Handlungen der Wirtschaftssubjekte noch beeinflußt werden können. Dabei ist die zweitgenannte Art für die Wirtschaftswissenschaftler von größerer Bedeutung. Je nach Modell kann man unter Informationsverzögerungen verstehen, daß heutige Daten erst zu einem späteren Zeitpunkt bekannt werden, oder daß Handlungen einer Gruppe oder einer Person erst zu einem späteren Zeitpunkt einer anderen Gruppe oder Person bekannt werden.[1)] Verzögerungen aus der Erwartungsbildung ergeben sich bei der "adaptive expectation hypothesis ", wobei Werte der Vergangenheit die zukünftigen Erwartungen mitbestimmen[2)]. Entscheidungsverzögerungen können dann auftreten, wenn die Entscheidung nicht von einer einzelnen Person sondern von einer Gruppe getroffen wird, und dort erst noch ein Überzeugungsprozeß, ein Abstimmungsprozeß oder eine Kompromißfindung vor die eigentliche Entscheidung geschaltet ist. Im nächsten Abschnitt wird nun das Modell von 2.1.) wieder aufgenommen und ein Aspekt betrachtet, der zu einem dynamischen Modell führt.

---

1) Beide sind offensichtlich nicht grundsätzlich verschieden, da Daten aus den Handlungen von Personen folgen.
2) M. Nerlove (1958)

3.2.) Geldpolitik bei einem dynamischen Geldschöpfungsmultiplikator.

3.2.1.) Herleitung eines Modells mit dynamischem Geldschöpfungsmultiplikator.

Beim statischen Geldschöpfungsmultiplikator wird angenommen, daß eine Veränderung der Reserven, die durch eine Zentralbankpolitik hervorgerufen wurde (etwa Offenmarktpolitik oder Mindestreservepolitik), eine sofortige Anpassung der Geschäftsbanken mit sich bringt. D.h. der Multiplikatorprozeß, der durch den Geldschöpfungsmultiplikator ausgedrückt wird, läuft in unendlich kleiner Zeit ab. Im Gegensatz dazu betrachten wir nun einen Geldschöpfungsprozeß, bei dem eine Variation der Zentralbankgeldmenge Z^a (oder des Mindestreservesatzes ι) sich zunächst auf die Überschußreserven auswirkt und dann erst im Laufe der Zeit über die Veränderung der Überschußreserven durch die Geschäftsbanken sich Auswirkungen auf das Geldangebot M^a ergeben. Das Konzept kann sowohl auf expansive als auch kontraktive Geldpolitik bezogen werden, wenn man davon ausgehen kann, daß beide Politiken symmetrisch wirken, also bei einer expansiven Politik die Überschußreserven zunächst aufgebaut werden und dann allmählich wieder abgebaut werden, und bei einer kontraktiven Politik die Überschußreserven zunächst abgebaut werden, und dann allmählich wieder aufgebaut werden. Dies ist allerdings dann problematisch, wenn ursprünglich keine Überschußreserven gehalten wurden. Eine kontraktive Politik führte dann zu einer Nichterfüllung der Mindestreserveverpflichtung. Das ist bei einer Kostenfunktion in besonderer Weise zu berücksichtigen. Eine Unterschreitung des Reservesolls ist kostenmäßig anders zu bewerten als eine Überschreitung. Aus diesem Grunde sollen die sich hier unmittelbar anschließenden

Überlegungen nur für expansive Politiken gelten.

Herleitung der Beziehung zwischen Geldangebot und Zentralbankgeldmenge[1]:

Bankbilanz im Zeitpunkt t:

$$(3\text{-}1) \qquad Z^{n}_{B,t} + B^{n}_{B,t} = D^{a}_{t}$$

Die Nachfrage der Banken nach Zentralbankgeld im Zeitpunkt t:

$$(3\text{-}2) \qquad Z^{n}_{B,t} = i\ D^{a}_{t} + U_{t} \qquad U_{t}: \text{Überschußreserven.}$$

Die Nichtbanken halten einen festen Teil c (Bargeldabflußkoeffizient) des Geldvolumens in Zentralbankgeld:

$$(3\text{-}3) \qquad Z_{NB,t} = c\ (D^{a}_{t} + Z_{NB,t})$$

$Z_{NB,t}$ stellt das den Nichtbanken angebotene und von diesen dann auch nachgefragte Zentralbankgeld dar.

$$(3\text{-}4) \qquad Z_{NB,t} = \frac{c}{1-c}\ D^{a}_{t}$$

Die konsolidierte Bilanz der Geschäftsbanken und der Zentralbank im Zeitpunkt t lautet:

$$(3\text{-}5) \qquad B^{n}_{ZB,t} + B^{n}_{B,t} = Z_{NB,t} + D^{a}_{t}$$

---

1) Die Herleitung schließt sich in wesentlichen Punkten Richter, Schlieper, Friedmann (1975), S. 378 f. an.

Aus (3-1) und (3-2) ergibt sich:

$$B^n_{B,t} = D^a_t\,(1-\iota) - U_t \tag{3-6}$$

und aus (3-4), (3-5) und (3-6) folgt:

$$B^n_{ZB,t} + (1-\iota)\,D^a_t - U_t = \frac{c}{1-c}\,D^a_t + D^a_t$$

$$\frac{(1-\iota)(1-c) - 1}{(1-c)}\,D^a_t = -B^n_{ZB,t} + U_t \tag{3-7}$$

Wegen $B^n_{ZB} = Z^a$ (das ist die Bilanz der Zentralbank) und wegen $(1-c)\,M^a = D^a$ gilt dann:

$$M^a_t = \frac{1}{c+\iota(1-c)}\,(Z^a_t - U_t) \tag{3-8}$$

$$M^a_t = \mu\,(Z^a_t - U_t) \tag{3-8a}$$

Während Z^a_t eine Instrumentvariable der Zentralbank ist, muß die Bestimmung von U_t erst erklärt werden. Bei einer Ausweitung der Zentralbankgeldbestände in t ergeben sich in der gleichen Periode Überschußreserven in gleicher Höhe, die anschließend auf den gewünschten Stand abgebaut werden. Betrachten wir zunächst den Fall, bei dem die gewünschten Überschußreserven $U^*_t = 0$. In Periode t werden durch Zentralbankpolitik Überschußreserven hervorgerufen. Der Teil dieser Überschußreserven, der in Periode $t+\tau$ abgebaut wird, sei η_τ, so daß die Folge $\eta_0, \eta_1, \ldots$ angibt, welche Teile in den der Periode t folgenden Perioden abgebaut werden. Da bis $t = \infty$ alles abgebaut sein soll, gilt $\sum_{\tau=0}^{\infty} \eta_\tau = 1$. Da in jeder Periode neue

Zentralbankpolitik betrieben wird, gilt für den Abbau von Überschußreserven in Periode t:

(3-9) $$- \Delta U_t = \eta_o \Delta Z_{t-1} + \eta_1 \Delta Z_{t-2} + \ldots, \quad 0 < \eta_i < 1$$

$\Delta Z_t = Z_t^a - Z_{t-1}^a$: Zentralbankpolitik in Periode t ist zu verstehen als Veränderung des Zentralbankgeldangebotes gegenüber der Vorperiode. Wesentlich sind nicht die abgebauten Überschußreserven, sondern die noch bestehenden. Diese lassen sich schreiben als:

$$U_t = \Delta Z_t + (1-\eta_o) \Delta Z_{t-1} + (1-\eta_o-\eta_1) \Delta Z_{t-2} + \ldots$$

(3-10) $$U_t = Z_t - \eta_o Z_{t-1} - \eta_1 Z_{t-2} - \eta_2 Z_{t-3} - \ldots$$

Also gilt wegen (3-8a) und (3-10):

(3-11) $$M_t^a = \mu \left[Z_t - Z_t + \eta_o Z_{t-1} + \eta_1 Z_{t-2} + \eta_2 Z_{t-3} + \ldots\right]$$

(3-11a) $$M_t^a = \tilde{\mu}_o Z_{t-1} + \tilde{\mu}_1 Z_{t-2} + \tilde{\mu}_2 Z_{t-3} + \ldots = L\tilde{\mu}(L) Z_t$$

mit L: Lagoperator

$\tilde{\mu}(L)$: Verzögerungsverteilung[1)]

Ohne nähere Angaben zu $\{\eta_i\}$ ist eine weitere Vereinfachung nicht möglich. Es können nun die verschiedensten Annahmen über $\{\eta_i\}$ gemacht werden. Eine übliche und in vieler Hinsicht sehr vorteilhaf-

---

1) Eine ausführliche Behandlung von Lags findet sich bei P. Dhrymes (1971). Man findet dort auch eine Darstellung des Lagoperators und der Verteilungsverzögerungen. Dhrymes spricht dabei von "polynomial operator".

te Annahme[1] ist, daß $\{\eta_i\}$ dem Gesetz einer geometrischen Reihe folgt:

$$\eta_i = \eta_o (1-\eta_o)^i$$

Dann gilt:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \eta_i = \eta_o (1 + (1-\eta_o) + (1-\eta_o)^2 + \dots)$$

$$= \frac{\eta_o}{1-(1-\eta_o)} = 1$$

Und für (3-11) kann geschrieben werden:

$$M_t^a = \mu\eta_o (Z_{t-1} + (1-\eta_o) Z_{t-2} + (1-\eta_o)^2 Z_{t-3} + \dots)$$

$$M_t^a = \mu\eta_o L (Z_t + (1-\eta_o) L Z_t + (1-\eta_o)^2 L^2 Z_t + \dots)$$

$$(3\text{-}12) \quad M_t^a = \frac{\mu\eta_o L}{1-[(1-\eta_o)L]} Z_t$$

$$M_t^a - (1-\eta_o) M_{t-1}^a = \mu\eta_o Z_{t-1}$$

$$(3\text{-}13) \quad M_t^a - M_{t-1}^a = -\eta_o M_{t-1}^a + \mu\eta_o Z_{t-1}$$

bzw.

$$(3\text{-}13a) \quad M_{t+1}^a - M_t^a = -\eta_o M_t^a + \mu\eta_o Z_t$$

---

1) Eine Beziehung der Art (3-11a) kann ohne weitere Angaben nicht geschätzt werden. Ein weiteres Problem, das bei (3-11a) auftritt ist das Problem der Instrumenteninstabilität. Vergleiche dazu Abschnitt 3.2.4.).

oder

$$M^a_{t+1} = (1-\eta_o)\, M^a_t + \mu\eta_o\, Z_t \qquad (3\text{-}13b)$$

Damit hat die geometrische Verteilung von $\{\eta_i\}$ zusammen mit (3-11a) den Vorteil, daß nur noch Z_{t-1} bzw. Z_t beachtet werden muß

Die Beziehungen (3-13) bzw. (3-13a) stellen einen dynamischen Zusammenhang zwischen der Zentralbankgeldmenge als Instrumentvariable und dem Geldangebot als Zielvariable dar. Zusammen mit dem Geldangebot der Periode bestimmt Z_t die Veränderung des Geldangebotes $(M^a_{t+1} - M^a_t)$.

Beim Modell des Abschnitts 2.1.) wurde der Zusammenhang zum Gesamtmodell durch die Berücksichtigung der Geldnachfrage und des Gütermarktes hergestellt. Übernehmen wir das Modell des Abschnitts 2.1.) unverändert bis auf die neue Geldangebotsfunktion (3-12) an Stelle der alten (2-1), dann gilt:

$$h_o\, Y_t - h_1\, i_t = \frac{\mu\eta_o L}{1-[(1-\eta_o)L]}\, Z_t \qquad (3\text{-}14)$$

als Gleichung für die LM-Kurve. Nach i_t aufgelöst und in die Gleichung der IS-Kurve (2-7) eingesetzt ergibt sich:

$$Y_t - Y_{t-1} = \zeta'_o + \zeta'_1\, Y_{t-1} + \zeta'_2\, Z_{t-1} \qquad (3\text{-}15)$$

mit

$$\zeta'_o = \frac{(g_o+e_o)\,\eta_o h_1}{(1-g_1)h_1+e_1h_o} \quad ; \quad \zeta'_1 = -\frac{\eta_o(e_1h_o+(1-g_1)h_1)}{(1-g_1)h_1+e_1h_o}$$

$$\zeta_2^i = \frac{e_1 \mu n_o}{(1-g_1)h_1 + e_1 h_o}$$

oder als reduzierte Form:

(3-15a) $$Y_{t+1} = \zeta_o + (1+\zeta_1)\, Y_t + \zeta_2\, Z_t$$

Zu Differenzengleichungen höherer Ordnung gelangt man schnell, wenn entweder neben dem Geldangebot auch andere Beziehungen mit einem oder mehreren Lags angesetzt werden[1], oder $\{\zeta_i\}$ in (3-11) einer anderen als der geometrischen Reihe folgt[2].

Bis jetzt wurde angenommen, daß die Geschäftsbanken langfristig keine Überschußreserven zu halten beabsichtigen. Die Annahme wird nun aufgehoben. Dann tritt auch die Beschränkung, daß nur expansive Politiken betrachtet werden, nicht mehr in der alten Schärfe auf. Denn nun kann durchaus auch eine kontraktive Politik betrachtet werden, solange der Abbau der Reserven nicht über die Überschußreserven hinaus erfolgt, so daß die Mindestreservepflicht verletzt wird. Es soll angenommen werden, daß sich die gewünschten Überschußreserven bestim-

---

1) Eine sehr einfache Möglichkeit hier wäre die Annahme, daß der Konsum vom Einkommen der Vorperiode abhängig ist, also der sogenannte Robertson-Lag. Daraus ergibt sich die Beziehung:

$$\left(1 + \frac{e_1 h_o}{h_1}\right) Y_t + \left(\zeta_o - 1 - g_1 - (1-\zeta_o)\frac{e_1 h_o}{h_1}\right) Y_{t-1} + (1-\zeta_o)\, g_1\, Y_{t-2}$$
$$= \zeta_o\, g_o + \frac{e_1}{h_1}\, \mu\zeta_o\, Z_{t-1}$$

2) Eine komplizierte Verzögerungsverteilung ergibt sich aus der in R. Solow (1960), S. 399-406, vorgeschlagene einfache Pascalverteilung. Danach gälte

$$\sum_{i=0}^{\infty} \zeta_i = \zeta_o^p + \binom{p}{1} \zeta_o^p (1-\zeta_o) + \binom{p+1}{2} \zeta_o^p (1-\zeta_o)^2 + \ldots$$

p: ganzzahlig (p=1: geometrische Verteilung). Statt (3-12) gälte dann

$$M_t^a = \mu \frac{\zeta_o^p\, L}{\left\{1 - \left[(1-\zeta_o)L\right]\right\}^p}\, Z_t$$

Mit zunehmendem p ergeben sich dann zunehmende Verzögerungen in den Beziehungen.

men nach :

$$U_t^* = k_o - k_1 \, i_t \qquad k_o, \, k_1 > 0$$

i_t sind dabei in diesem einfachen Modell wieder die Alternativkosten. In jeder Periode wird eine Zantralbankpolitik $\Delta Z_t = Z_t - Z_{t-1}$ betrieben. Nehmen wir an, in der Periode t=0 herrsche Gleichgewicht in dem Sinne, daß die tatsächlichen Überschußreserven gleich den gewünschten sind. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird angenommen, daß diese gerade null ist, also $U_o = U_o^* = 0$. In der Periode t=1 wird eine Zentralbankpolitik ΔZ_1 betrieben, die zunächst voll die Überschußreserven trifft. Damit beträgt die Überschußreserve in t=1:

$$\underbrace{U_o}_{0} + \Delta Z_1 \equiv U_1$$

In der folgenden Periode 2 wird die Politik ΔZ_2 betrieben. Gleichzeitig wird von den Banken eine Korrektur realisiert, um die sich in der Vorperiode ergebende Differenz $(U_1^* - U_1)$ verschwinden zu lassen, bzw. zu verringern. Es wird angenommen, daß die Banken gerade den Teil ζ_o der unerwünschten Überschußreserven abbauen (wenn $U_1^* - U_1 < 0$), bzw. den Teil ζ_o der fehlenden Überschußreserven aufbauen (wenn $U_1^* - U_1 > 0$), d.h. also eine Veränderung der Überschußreserven um $\zeta_o \, (U_1^* - U_1)$. Damit gilt für U_2:

$$U_1 + \Delta Z_2 + \zeta_o \, (U_1^* - U_1) \equiv U_2$$

$$U_2 = \Delta Z_1 + \Delta Z_2 + \zeta_o \, (U_1^* - \Delta Z_1)$$

$$= (1-\zeta_o) \, \Delta Z_1 + \Delta Z_2 + \zeta_o \, U_1^*$$

Für folgende Perioden sind nun zwei unterschiedliche Möglichkeiten denkbar:

a) Es wird immer ein fester Teil ζ_o der Abweichung $(U^*_{t-1} - U_{t-1})$ in Periode t abgebaut.

b) Je nachdem, in welcher Periode die Abweichung $(U^*_{t-i} - U_{t-i})$ erzeugt wurde, wird in Periode t ein verschieden großer Teil ζ_{i-1} abgebaut. Diese zweite Möglichkeit stimmt formal mit der Analyse des Falls $U^*_t = 0$ überein, ist jedoch aus folgender Überlegung zu verwerfen: Die in jeder Periode gewünschten Überschußreserven hängen vom jeweiligen Zins ab. Dieser wird sich jedoch alleine schon wegen der fortwährenden Zentralbankpolitik verändern. Eine Differenz $(U^*_{t-i} - U_{t-i})$ ist, da $U^*_t \neq U^*_{t-i}$, in Periode t mithin von keiner Bedeutung mehr. Wir folgen deshalb der Alternative a):

In Periode 3 wird die Politik ΔZ_3 betrieben und um $\zeta_o(U^*_2 - U_2)$ korrigiert, so daß gilt:

$$U_2 + \Delta Z_3 + \zeta_o (U^*_2 - U_2) \equiv U_3$$

$$U_3 = \Delta Z_1 + \Delta Z_2 + \Delta Z_3 + \zeta_o (U^*_1 - \Delta Z_1) + \zeta_o (U^*_2 - \Delta Z_1 - \Delta Z_2 \zeta_o (U^*_1 - \Delta Z_1))$$

$$= (1-\zeta_o)^2 \Delta Z_1 + (1-\zeta_o)^1 \Delta Z_1 + (1-\zeta_o)^o \Delta Z_3$$

$$+ \zeta_o (1-\zeta_o)^1 U^*_1 + \zeta_o (1-\zeta_o)^o U^*_2$$

Wenn wir jetzt zu der Periode t übergehen, wobei die Situation, in der Gleichgewicht geherrscht hat, unendlich weit zurückliegt, dann gilt:

$$U_t = \Delta Z_t + (1-\zeta_o)\, L\, \Delta Z_t + (1-\zeta_o)\, L^2\, \Delta Z_t + \ldots$$

$$+\zeta_o\, L\, U_t^* + \zeta_o\, (1-\zeta_o)\, L^2\, U_t^* + \zeta_o\, (1-\zeta_o)^2\, L^3\, U_t^* + \ldots$$

$$= (1 + (1-\zeta_o)\, L + (1-\zeta_o)^2\, L^2 + \ldots)\, \Delta Z_t$$

$$+\zeta_o\, L\, (1 + (1-\zeta_o)\, L + \ldots)\, U_t^*$$

mit L: Lagoperator

$$(3\text{-}16) \quad U_t = \frac{1}{1-(1-\zeta_o)L}\, \Delta Z_t + \frac{\zeta_o L}{1-(1-\zeta_o)L}\, U_t^*$$

Zusammen mit (3-8a) gilt dann:

$$(3\text{-}17) \qquad M_t^a = \mu\left(Z_t - \frac{1}{1-(1-\zeta_o)L}\, \Delta Z_t - \frac{\zeta_o L}{1-(1-\zeta_o)L}\, U_t^*\right)$$

oder:

$$(3\text{-}18) \qquad M_t^a - M_{t-1}^a = -\zeta_o\, M_{t-1}^a + \mu\zeta_o\, Z_{t-1} - \mu\zeta_o\, U_{t-1}^*$$

bzw.

$$(3\text{-}18a) \qquad M_{t+1}^a - M_t^a = -\zeta_o\, M_t^a + \mu\zeta_o\, Z_t - \mu\zeta_o\, U_t^*$$

eine Beziehung die bis auf $-\mu\zeta_o\, U_t^*$ mit der Beziehung (3-13) bzw. (3-13a) übereinstimmt. Die Analogie zu (3-13b) lautet:

$$(3\text{-}18b) \qquad M_{t+1}^a = (1-\zeta_o)\, M_t^a + \mu\zeta_o\, Z_t - \mu\zeta_o\, U_t^*$$

Für U_t^* eingesetzt, gilt:

$$(3\text{-}19) \qquad M_t^a - M_{t-1}^a = -\zeta_o M_{t-1}^a + \mu\zeta_o Z_{t-1} - \mu\zeta_o k_o + \mu\zeta_o k_1 i_{t-1}$$

Man kann den Term $\mu\zeta_o k_1 i_t$ als exogene Größe ansehen. Diese Interpretation würde jedoch dem i_t nicht gerecht. Vielmehr wird i_t von vergangenen und gegenwärtigen Veränderungen der Zentralbankgeldmenge mitbestimmt, sofern das Geldangebot den Zins mitbeeinflußt, und das Geldangebot von den Veränderungen der Zentralbankgeldmenge abhängt.

Wir vervollständigen das Modell um die Geldnachfrage (2-2) und die Gütermarktgleichung (2-7).

$$M^n = h_o Y_t - h_1 i_t = M_t^a = (1-\zeta_o) M_{t-1}^a + \mu\zeta_o Z_{t-1} - \mu\zeta_o k_o + \mu\zeta_o k_1 i_{t-1}$$

Nach i_t aufgelöst gilt:

$$(3\text{-}20) \quad i_t = (1-\zeta_o) h_1' M_{t-1}^a + \mu\zeta_o h_1' Z_{t-1} + \mu\zeta_o k_1 h_1' i_{t-1} - \left(h_o \frac{g_o+e_o}{1-g_1} + \mu\zeta_o k_o\right) h_1'$$

$$\text{mit} \qquad h_1' = -\frac{1}{\frac{h_o e_1}{1-g_1} + h_1}$$

(3-20) in (3-19) eingesetzt ergibt:

$$(3\text{-}21) \qquad M_t^a = (1-\zeta_o) L \{ 1 + \mu\zeta_o k_1 h_1' L + (\mu\zeta_o k_1 h_1')^2 L^2 + \ldots \} M_t^a + \mu\zeta_o L \{ 1 + \mu\zeta_o k_1 h_1' L + (\mu\zeta_o k_1 h_1')^2 L^2 + \ldots \} Z_t$$

$$- \mu\zeta_o k_o \{ 1 + \mu\zeta_o k_1 h_1' L + (\mu\zeta_o k_1 h_1')^2 L^2 + \dots$$

$$- \frac{g_o+e_o}{1-g_1} h_o \{ 1 + \mu\zeta_o k_1 h_1' L + (\mu\zeta_o k_1 h_1')^2 L^2 + \dots$$

$$+ \frac{g_o+e_o}{1-g_1} h_o + (\mu\zeta_o k_1 h_1')^{n-1} \mu\zeta_o k_1 i_{t-n}$$

Bei $n \to \infty$ und $|\mu\zeta_o k_1 h_1'| < 1$, gilt:

$$M_t^a = \frac{1-\zeta_o}{1- \mu\zeta_o k_1 h_1' L} M_{t-1}^a + \frac{\mu\zeta_o}{1- \mu\zeta_o k_1 h_1' L} Z_{t-1}$$

$$- \frac{\mu\zeta_o k_o}{1- \mu\zeta_o k_1 h_1' L} - \left[\frac{(g_o+e_o) h_o}{1-g_1} \Big/ (1- \mu\zeta_o k_1 h_1' L) \right]$$

$$+ \frac{(g_o+e_o) h_o}{1-g_1}$$

$$(1- \mu\zeta_o k_1 h_1' L) M_t^a = (1-\zeta_o) M_{t-1}^a + \mu\zeta_o Z_{t-1}$$

$$- \mu\zeta_o k_o - \frac{(g_o+e_o) h_o}{1-g_1}$$

$$+ \frac{(g_o+e_o) h_o}{1-g_1} - \frac{(g_o+e_o) h_o}{1-g_1} \mu\zeta_o k_1 h_1'$$

$$M_t^a - h_1'' M_{t-1}^a = (1-\zeta_o) M_{t-1}^a + \mu\zeta_o Z_{t-1} - \mu\zeta_o k_o - \frac{(g_o+e_o)h_o h_1''}{1-g_1}$$

$$(3\text{-}22) \quad M_t^a - M_{t-1}^a = (h_1'' - \zeta_o) M_{t-1}^a + \mu\zeta_o Z_{t-1} - \mu\zeta_o k_o - \frac{(g_o+e_o)h_o h_1''}{1-g_1}$$

$$\text{mit } h_1'' = \mu\zeta_o k_1 h_1'$$

Oder

$$(3\text{-}22a) \quad M_{t+1}^a = (1 + h_1'' - \zeta_o) M_t^a + \mu\zeta_o Z_t - \mu\zeta_o k_o - \frac{(g_o+e_o)h_o h_1''}{1-g_1}$$

Aus (3-22a) erkennt man: Wenn die Zentralbank die Parameter und das gegenwärtige Geldangebot kennt, dann kann sie genau die Wirkung der heute gewählten Zentralbankgeldmenge auf das Geldangebot der nächsten Periode abschätzen. (3-22) stimmt mit dem Charakter von (3-18) überein. Der variierende Einfluß des U_{t-1}^* ist in den Einfluß von M_{t-1} in Form des h_1'' integriert worden. Ist $|\mu\zeta_o k_1 h_1'| \geq 1$, dann kann die Vereinfachung mit Hilfe geometrischer Reihen nicht durchgeführt werden. Der Einfluß vergangener M_t^a- und Z_t-Werte wird immer stärker. Weiter gilt, daß die hier gemachten Ausführungen nur bei konstanten Parametern gelten.

(3-22) gibt die Beziehung zwischen der Zentralbankgeldmenge und der Veränderung der Geldmenge an. Wenn auch der Realteil einbezogen werden soll, dann ist folgendermaßen zu verfahren:

Das Geldangebot, beschrieben durch (3-17), ist gleichzusetzen der Geldnachfrage, beschrieben durch (2-2) und nach dem Zins i_t

aufzulösen:

$$(3\text{-}23) \qquad i_t = \frac{h_o}{h_1} Y_t - \frac{h_o}{h_1}(1-\zeta_o) Y_{t-1} - \zeta_o \frac{\mu}{h_1} Z_{t-1}$$

$$+ (1-\zeta_o-\zeta_o \frac{\mu k_1}{h_1}) i_{t-1} + \frac{\zeta_o \mu k_o}{h_1}$$

(3-23) in (2-7) eingesetzt ergibt:

$$(3\text{-}24) \qquad Y_t = \frac{g_o + e_o}{1-g_1} - \frac{e_1}{1-g_1} \frac{\zeta_o \mu k_o}{h_1} (1 + (1-\zeta_o(1 + \frac{\mu k_1}{h_1})) L + \dots)$$

$$- \frac{e_1 h_o}{(1-g_1)h_1} (1 + (1-\zeta_o(1 + \frac{\mu k_1}{h_1})) L + (1-\zeta_o(1+\frac{\mu k_1}{h_1}))^2 L^2 + \dots)$$

$$(Y_t - (1-\zeta_o) Y_{t-1})$$

$$+ \frac{e_1}{1-g_1} \zeta_o \frac{\mu}{h_1} (1 + (1-\zeta_o(1+ \frac{\mu k_1}{h_1})) L + (1-\zeta_o(1+ \frac{\mu k_1}{h_1}))^2 L^2 + \dots) Z_{t-1}$$

$$- \frac{e_1}{1-g_1} (1- \zeta_o(1+ \frac{\mu k_1}{h_1}))^n i_{t-n}$$

Unter der Voraussetzung, daß $| (1- \zeta_o (1+ \frac{\mu k_1}{h_1})) | < 1$, kann wieder die Koycksche Transformation durchgeführt werden: (zudem wird angenommen, daß n so groß ist, daß der Koeffizient von i_{t-n} verschwindet).

$$Y_t = \frac{g_o+e_o}{1-g_1} - \frac{e_1}{1-g_1} \cdot \frac{1}{1-(1-\zeta_o(1+\frac{\mu k_1}{h_1}))\ L} \cdot \frac{\zeta_o \mu k_o}{h_1}$$

$$- \frac{e_1 h_o}{(1-g_1)h_1} \quad \frac{1}{1-(1-\zeta_o(1+\frac{\mu k_1}{h_1}))\ L} \quad (Y_t-(1-\zeta_o)Y_{t-1})$$

$$+ \frac{e_1 \zeta_o \mu}{(1-g_1)h_1} \cdot \frac{L}{1-(1-\zeta_o(1+\frac{\mu k_1}{h_1}))\ L} \quad Z_t$$

(3-25) $\quad Y_t - Y_{t-1} = \zeta_o'' + \zeta_1''\ Y_{t-1} + \zeta_2''\ Z_{t-1}$

bzw.

(3-25a) $\quad Y_{t+1} - Y_t = \zeta_o'' + \zeta_1''\ Y_t + \zeta_2''\ Z_t$

mit:

$$\zeta_o'' = \frac{\frac{g_o+e_o}{1-g_1}\ \zeta_o\ (1+\frac{\mu k_1}{h_1}) - \frac{e_1}{1-g_1}\ \frac{\zeta_o\ \mu k_o}{h_1}}{1 + \frac{e_1 h_o}{(1-g_1)h_1}}$$

$$\zeta_1'' = \frac{1-\zeta_o(1+\frac{\mu k_1}{h_1}) + \frac{e_1 h_o(1-\zeta_o)}{(1-g_1)h_1}}{1 + \frac{e_1 h_o}{(1-g_1)h_1}} - 1$$

$$= - \frac{\zeta_o\left(1 + \frac{\mu k_1}{h_1}\right) + \frac{e_1 h_o \zeta_o}{(1-g_1)h_1}}{1 + \frac{e_1 h_o}{(1-g_1)h_1}}$$

$$\zeta_2'' = \frac{\frac{e_1 \zeta_o \mu}{(1-g_1)\, h_1}}{1 + \frac{e_1 h_o}{(1-g_1)h_1}}$$

oder die reduzierte Form mit dem "Realteil" des Modells:

(3-25b) $Y_{t+1} = \zeta_o'' + (1+ \zeta_1'')Y_t + \zeta_2'' Z_t$

Wie im Falle mit $U_t^* = 0$ ergeben sich hier Differenzengleichungen höherer Ordnung, wenn (2-2) und / oder (2-7) mit einem oder mehreren Lags angesetzt werden[1].

3.2.2.) Die optimale Zentralbankpolitik in einem Modell mit dynamischem Geldschöpfungsmultiplikator.

Geldpolitik wird mit dem Ziel betrieben, ein Volkseinkommen zu realisieren, das den Vorstellungen der Zentralbank entspricht. In der Regel meinen wir damit das Vollbeschäftigungseinkommen.

---

1) Die Möglichkeit eine andere Lagstruktur zu wählen ist hier nicht gegeben wie im Falle, daß $U^* = 0$.

Wir bezeichnen dieses Ziel mit Y^*. Wie im Modell des Abschnitts 2.3.1.) wird eine optimale Zentralbankgeldmenge angenommen. Es wird hier als optimale Zentralbankgeldmenge Z^* jene Größe bezeichnet, die geeignet ist, ein bestehendes Vollbeschäftigungsgleichgewicht zu erhalten.

Das System ist nun entsprechend (3-15a) oder (3-25a) gekennzeichnet durch:

$$Y_{t+1} = \zeta_o + \zeta_1 Y_t + \zeta_2 Z_t \tag{3-26}$$

und die angestrebte Gleichgewichtssituation durch:

$$Y^* = \zeta_o + \zeta_1 Y^* + \zeta_2 Z^* \tag{3-26a}$$

Subtrahiert man (3-26) von (3-26a), dann ergibt sich:

$$y_{t+1} = \zeta_1 y_t + \zeta_2 z_t \tag{3-27}$$

$$\text{mit } (Y^* - Y_t) = y_t \quad , \quad (Z^* - Z_t) = z_t$$

Der Zentralbank entstehen Kosten aus der Zieldivergenz $(Y^* - Y_t)$ und aus ihrer Intervention Z_t. Ihre gesamten Kosten werden durch das folgende Kostenfunktional ausgedrückt[1)2)]:

---

1) Ein Funktional ist die Abbildung einer Menge von Funktionen in den Raum der reellen Zahlen R. In unserem Fall wird jedem Zeitpfad $\{y_t, z_t\}$, also Funktionen in der Zeit, ein bestimmter Zahlenwert zugeordnet: $\{y_t, z_t\} \rightarrow k \in R$. Für eine ausführliche Definition des Funktionalbegriffs: M. Athans and P. Falb (1966), S. 108-110.

2) Gelegentlich wird der Endzustand in T noch dadurch besonders ausgezeichnet, daß dem y_T andere Kosten zugeordnet werden als den Werten in t=0... T-1:

$$K_{ZB}^{+} = k_1^{+} y_T + \sum_{t=0}^{T-1} (k_1 y_t + k_2 z_t)$$

Das ist z.B. dann sinnvoll, wenn in T ein bestimmter Wert erreicht werden soll. Dann kann es notwendig sein, hier Abweichungen extrem hoch zu bewerten, so daß möglichst eine Anpassung an den Zielwert erreicht wird.

$$K_{ZB} = k_1 \, y_T + \sum_{t=0}^{T-1} (k_1 \, y_t^2 + k_2 \, z_t^2) \tag{3-28}$$

Unter Umständen ist es sinnvoll, die Kosten der Abweichungen vom Idealwert nicht über alle Zeit als konstant anzusehen, sondern Abweichungen, die weiter in der Vergangenheit liegen mit geringeren Kosten zu belegen als Abweichungen, die näher an der Gegenwart liegen. Wir kennen hierfür die Abdiskontierung der Kosten (oder des Gewinns) auf einen festen Zeitpunkt, also etwa auf t = 0. Berücksichtigt man dies, dann muß (3-28) um einen Faktor $0 < \rho < 1$ ergänzt werden:

$$K'_{ZB} = \rho^T k_1 \, y_T^2 + \sum_{t=0}^{T-1} \rho^t \, (k_1 \, y_t^2 + k_2 \, z_t^2) \tag{3-28a}$$

Unser Problem ist somit die Minimierung von (3-28) bzw. (3-28a) unter der Nebenbedingung (3-27)[1]. Oder anders ausgedrückt, $\{z_t\}$, t = 0 ... T-1 so zu finden, daß (3-28) bzw. (3-28a) unter Berücksichtigung der Nebenbedingung (3-27) minimiert wird. Für derartige Aufgaben stehen mehrere mathematische Methoden zur Verfügung. Wir wählen die dynamische

---

1) Im Kern handelt es sich bei dem Problem um ein sogenanntes tracking-Problem, das darin besteht einen optimalen Pfad an einen Idealzustand oder eine optimale Funktion zu bestimmen, wobei hier der Idealzustand (Y^*, Z^*) ist. Durch die Umformulierung in ein System in y_t, z_t wurde jedoch dieses tracking-Problem in ein state-regulator-Problem überführt. Diese Überführung ist natürlich nicht immer möglich. Tracking-Probleme und state-regulator-Probleme und die Überführung von einem zum anderen im zeitkontinuierlichen Fall findet man bei M. Athans and P. Falb (1966) Chapter 9.

Programmierung[1].

Die Herleitung der optimalen Politik wird in mehrere Schritte zerlegt[2)3)]:

1. Schritt

Die Gesamtkosten werden aufgespalten in Kosten, die vor einem Zeitpunkt i entstehen und Kosten, die nach dem Zeitpunkt i entstehen. Damit kann (3-28) bzw. (3-28a) aufgespalten werden in:

$$(3\text{-}29) \qquad K_{ZB} = \underbrace{\sum_{t=0}^{i-1} (k_1\, y_t^2 + k_2\, z_t^2)}_{\text{1. Term}} + \underbrace{\sum_{t=i}^{T-1} (k_1\, y_t^2 + k_2\, z_t^2) + k_1\, y_T^2}_{\text{2. Term}}$$

Der jeweils erste Term ist für die Bestimmung von $z_i \ldots z_{T-1}$ unwichtig, da $z_i \ldots z_{T-1}$ den ersten Term nicht beeinflussen. Damit ist zur Bestimmung von $z_i \ldots z_{T-1}$ nur noch der 2. Term zu beachten. Es sind die $z_i \ldots z_{T-1}$ zu bestimmen, die den 2. Term

---

1) Die dynamische Programmierung ist für den Fall der diskontinuierlichen Zeitbetrachtung am üblichsten. Daneben existieren jedoch noch weitere Lösungskonzepte. Dabei ist zunächst das Pontryaginsche Maximumprinzip zu nennen. Dieses findet insbesondere bei stetiger Zeitbetrachtung Anwendung. Vgl. dazu M. Athans and P. Falb (1966). Jedoch auch bei diskontinuierlichen Modellen kann das Maximumprinzip angewandt werden. Eine Grundüberlegung findet sich dazu bei H. Halkin (1964). Anwendung findet das Maximumprinzip für diskontinuierliche Modelle etwa bei R. Pindyck (1973). Als dritte Möglichkeit sei die sogenannte Theil-Lösung angegeben, die bei B. Friedman (1975a) Anwendung findet. Die Lösung des Problems mit Hilfe der dynamischen Programmierung findet sich bei G. Chow (1975) oder K. Aström (1970).

2) Die Herleitung lehnt sich an K. Aström (1970), S. 264-268 an. Ströms Herleitung gilt für stochastische Prozesse, wobei y_t und z_t Vektoren sind. Diese Herleitung kann aber leicht für unser Problem abgeändert werden.

3) Wir leiten hier nur die optimale Politik für das Kostenfunktional (3-28) ab. Die Politik für das Kostenfunktional (3-28a) findet sich im Anhang 1.

minimieren. Wir schreiben:

$$(3\text{-}30) \qquad V(y_i, i) = \min_{z_i \ldots z_{T-1}} \{ k_1 y_T^2 + \sum_{t=i}^{T-1} (k_1 y_t^2 + k_2 z_t^2) \}$$

2. Schritt

(3-30) kann man, da die Wahl eines z_t auf zeitlich davorliegende Größen keinen Einfluß hat, folgendermaßen zerlegen:

$$(3\text{-}31) \qquad V(y_i, i) = \min_{z_i} \{ k_1 y_i^2 + k_2 z_i^2 + \min_{z_{i+1}} [k_1 y_{i+1}^2 + k_2 z_{i+1} + \min_{z_{i+2}} (k_1 y_{i+2}^2 + k_2 z_{i+2}^2 \ldots)] \}$$

Die gleiche Überlegung, für Periode (i+1) angestellt, ergibt:

$$(3\text{-}32) \qquad V(y_{i+1}, i+1) = \min_{z_{i+1}} [k_1 y_{i+1}^2 + k_2 z_{i+1}^2 + \min_{z_{i+2}} (k_1 y_{i+2}^2 + k_2 z_{i+2}^2 \ldots)]$$

(3-32) in (3-31) eingesetzt ergibt nun:

$$(3\text{-}33) \qquad V(y_i, i) = \min_{z_i} \{ k_1 y_i^2 + k_2 z_i^2 + V(y_{i+1}, i+1) \}$$

Für t = T gilt:

$$(3\text{-}34) \qquad V(y_T, T) = \min \{ k_1 y_T^2 \} = k_1 y_T^2$$

(3-34) gilt, weil der Zeithorizont auf T begrenzt ist, und z_T nur noch auf y_{T+1} Auswirkungen hätte und deshalb null gesetzt wird.

(3-33) stellt den Kerngedanken des Optimalitätsprinzips dar. Diese Beziehung heißt auch Bellman-Gleichung oder Bellmansche Funktionalgleichung. (3-34) ist die Anfangsbedingung für (3-33). Die dynamische Programmierung beruht auf dem Optimalitätsprinzip von Bellman.

Optimalitätsprinzip[1]:
Eine optimale Politik $z_i \ldots z_{T-1}$ eines auf der Stufe i ($0 \leq i \leq T-1$) eines T - stufigen Prozesses beginnenden (T-i)-stufigen Teilprozesses ist nur abhängig von dem Wert der Zustandsvariablen zu Beginn der Stufe i, y_i, und nicht direkt von den vorhergehenden Entscheidungen $z_o \ldots z_{i-1}$.

Mit Hilfe des Optimalitätsprinzips und der Bellman-Gleichung kann nun der Grundgedanke unseres Lösungsweges klar gemacht werden:

Die Anfangsbedingung (3-34) ergibt die Lösung für Periode T. Dann wird gemäß der Bellman-Gleichung das Problem für die letzten beiden Perioden T und T-1 gelöst, d.h. z_{T-1} gesucht,

---

1) Die Definition des Optimalitätsprinzips ist sinngemäß entnommen aus K. Neumann (1969), S. 5-8. Dort findet man auch einen Beweis des Prinzips.

in Abhängigkeit von einer beliebigen Anfangsbedingung y_{T-1}. Nach dem Optimalitätsprinzip müssen vorangehende Politiken nicht berücksichtigt werden. Haben wir das optimale z_{T-1} gefunden, gehen wir einen weiteren Schritt zurück: Wir suchen das optimale z_{T-2} in Abhängigkeit von einem beliebigen y_{T-2}. So wird weiter verfahren bis zur letzten Stufe: Hier wird das optimale z_o bestimmt unter Kenntnis des vorgegebenen y_o. In (3-33) ist dieser Prozeß als eine schrittweise Verminderung des i darzustellen. Wir zerlegen also das Problem der Bestimmung der T Politiken $z_o \ldots z_{T-1}$ in T Probleme mit jeweils einer zu bestimmenden Politik z_t.

3. Schritt

Im 3. Schritt soll nun diese Methode zur Lösung unseres Problems verwendet werden. Dazu wird gezeigt, daß $V(y_t, t)$ immer in der Form:

$$V(y_t, t) = S_t\, y_t^2 \tag{3-35}$$

geschrieben werden kann. Der Beweis erfolgt über vollständige Induktion. Für $V(y_T, T)$ ist die Gültigkeit durch (3-34) gezeigt. Angenommen die Schreibweise gelte für t+1; dann soll gezeigt werden, daß sie auch für t gilt:

Es gelte:

$$V(y_{t+1}, t+1) = S_{t+1}\, y_{t+1}^2 \tag{3-35a}$$

Einsetzen der Nebenbedingung (3-27) ergibt:

$$V(y_{t+1}, t+1) = S_{t+1}(\zeta_1\, y_t + \zeta_2\, z_t)^2 \tag{3-36}$$

In die Bellman-Gleichung (3-33) eingesetzt:

$$(3\text{-}37) \qquad V(y_t, t) = \min_{z_t} \{ k_1 y_t^2 + k_2 z_t^2 + S_{t+1}(\zeta_1 y_t + \zeta_2 z_t)^2 \}$$

Bildung der quadratischen Ergänzung:

$$(3\text{-}38) \qquad V(y_t,t) = \min_{z_t} \{ \Big[\zeta_1^2 S_{t+1} + k_1 - (S_{t+1} \zeta_2^2 + k_2) \Big(\frac{S_{t+1} \zeta_1 \zeta_2}{k_2 + \zeta_2^2 S_{t+1}} \Big)^2 \Big] y_t^2 + (k_2 + S_{t+1} \zeta_2^2) \Big(z_t + \frac{S_{t+1} \zeta_1 \zeta_2}{k_2 + S_{t+1} \zeta_2^2} y_t \Big)^2 \}$$

Die Minimierung des Ausdrucks erfolgt nun dadurch, daß

$z_t + \frac{S_{t+1} \zeta_1 \zeta_2}{k_2 + S_{t+1} \zeta_2^2} y_t = 0$ gesetzt wird, da in diesem Ausdruck

alleine z_t vorkommt und der Ausdruck selbst quadratisch auftritt[1]. Allerdings muß noch gezeigt werden, daß $(k_2 + S_{t+1} \zeta_2^2) \geq 0$ ist. Da $k_2 > 0$ ist, muß nur noch gezeigt werden, daß $S_{t+1} \geq 0$ ist. Daß dies gilt wird klar, wenn die Bestimmungsgleichung von S_{t+1} bzw. S_t dargestellt wird. Wegen (3-38) gilt:

$$(3\text{-}39) \qquad V(y_t,t) = \zeta_1^2 S_{t+1} + k_1 - (S_{t+1} \zeta_2^2 + k_2) \Big(\frac{S_{t+1} \zeta_1 \zeta_2}{S_{t+1} \zeta_2^2 + k_2} \Big)^2 y_t^2$$

---

1) Zum gleichen Ergebnis für das minimierende z_t kommt man, wenn (3-37) nach z_t abgeleitet wird und null gesetzt wird.

(3-40) $$V(y_t,t) = S_t\, y_t^2$$

Also folgt aus (3-39) und (3-40):

(3-41) $$S_t = \zeta_1^2\, S_{t+1} + k_1 - (S_{t+1}\,\zeta_2^2 + k_2)\left(\frac{S_{t+1}\,\zeta_1\,\zeta_2}{S_{t+1}\zeta_2^2 + k_2}\right)^2$$

(3-42) $$= \zeta_1\, S_{t+1}\left(\zeta_1 - \zeta_2\,\frac{\zeta_1\,\zeta_2 S_{t+1}}{S_{t+1}\zeta_2^2 + k_2}\right) + k_1$$

Eine einfache Zerlegung stellt die folgende Beziehung dar:

(3-43) $$k_2\,\frac{\zeta_1\,\zeta_2^2 S_{t+1}}{k_2 + S_{t+1}\,\zeta_2^2} = \zeta_2\, S_{t+1}\left(\zeta_1 - \zeta_2\,\frac{\zeta_1\,\zeta_2\,S_{t+1}}{S_{t+1}\,\zeta_2^2 + k_2}\right),$$

Dies wird sofort klar, wenn man den 2. Ausdruck der rechten Seite addiert und ausmultipliziert. Es folgt dann daraus:

(3-44) $$0 = -\,k_2\left(\frac{\zeta_1\,\zeta_2\,S_{t+1}}{k_2 + S_{t+1}\,\zeta_2^2}\right)^2 + \zeta_2\left(\frac{\zeta_1\,\zeta_2\,S_{t+1}}{S_{t+1}\,\zeta_2^2 + k_2}\right) S_{t+1}$$

$$\cdot\left(1 - \zeta_2\,\frac{\zeta_2\,S_{t+1}}{S_{t+1}\zeta_2^2 + k_2}\right),$$

Subtrahiert man (3-44) von (3-42) dann folgt:

$$(3\text{-}45) \qquad S_t = k_2 \left(\frac{\zeta_1 \zeta_2 S_{t+1}}{k_2 + S_{t+1}\zeta_2^2}\right)^2 + k_1 + \left(\zeta_1 - \zeta_2 \frac{\zeta_1 \zeta_2 S_{t+1}}{S_{t+1}\zeta_2^2 + k_2}\right)^2 S_{t+1}$$

Damit folgt, daß $S_t \geq 0$, wenn $k_2 \geq 0$, $k_1 \geq 0$, $S_{t+1} \geq 0$ [1]. Die Anfangsbedingung für S_t ist aber aus (3-34) und (3-40)

$$(3\text{-}46) \qquad S_T = k_1$$

Damit kann mit Hilfe eines Induktivschlusses gefolgert werden, daß auch alle anderen $S_t \geq 0$ sind, wenn $k_2 \geq 0$, $k_1 \geq 0$ und $S_t > 0$ wenn k_1 oder k_2 echt größer null ist. Damit ist unsere Optimallösung entsprechend den Ausführungen auf S. 58 gegeben durch:

$$(3\text{-}47) \qquad z_t = -\frac{\zeta_1 \zeta_2 S_{t+1}}{k_2 + S_{t+1}\zeta_2^2} y_t$$

wobei S_{t+1} durch (3-45) mit der Anfangsbedingung (3-46) gegeben ist.

Machen wir nun die Transformationen rückgängig, dann kann (3-47) geschrieben werden als:

$$(3\text{-}47a) \qquad Z_t = \frac{\zeta_1 \zeta_2 S_{t+1}}{k_2 + S_{t+1}\zeta_2^2} (Y^* - Y_t) + Z^*$$

---

1) Das ist eine hinreichende, keine notwendige Bedingung.

(3-47) zeigt, daß eine optimale Politik proportional ist. Allerdings ist hier, wie man aus (3-45) und (3-47) ersieht, dieser Proportionalitätsfaktor nicht konstant in der Zeit. Wir zeigen im Anhang II, daß unter der Bedingung $k_2 > 0$ $k_1 \geq 0$

$$\left| \frac{\zeta_1 \zeta_2 S_{t+1}}{k_2 + \zeta_2^2 S_{t+1}} \right|$$

im Zeitverlauf monoton abnimmt. Damit kann folgender Satz formuliert werden:

Satz:
In einem Modell (3-27) mit dem dynamischen Geldschöpfungsmultiplikator ist das optimale Zentralbankgeldangebot, im Sinne der Minimierung von (3-28), gleich der Summe aus der langfristig optimalen Zentralbankgeldmenge Z^* und einem Ausdruck proportional der Differenz aus dem angestrebten Volkseinkommen und dem jeweils herrschenden Einkommen. Der Proportionalitätsfaktor, der von den Parametern des Systems abhängt, nimmt absolut gesehen in der Zeit ab.

Daß die optimale Politik proportional der jeweiligen Differenz (Y^*-Y_t) ist, mag auch ohne Rechnung einleuchten, nicht aber daß der Proportionalitätsfaktor in der Zeit abnimmt. Der Wert der Optimierung liegt darüberhinaus darin, daß man nun die Werte dieses Proportionalitätsfaktors kennt.

Wenn wir unseren Planungshorizont T gegen unendlich gehen lassen, dann konvergiert $S_t \to S$ [1], das bestimmt wird durch:

$$(3\text{-}42a) \qquad S = \zeta_1 S \left(\zeta_1 - \zeta_2 \frac{\zeta_1 \zeta_2 S}{k_2 + \zeta_2^2 S}\right) + k_1$$

Dann wird die optimale Politik z_t proportional y_t mit einem konstanten Proportionalitätsfaktor:

---

1) Der Beweis wird in Abschnitt 3.2.3.) für ein allgemeines Modell geführt.

$$(3\text{-}47b) \qquad z_t = - \frac{\zeta_1 \zeta_2 S}{k_2 + \zeta_2^2 S} y_t$$

3.2.3) Die optimale Zentralbankpolitik in einem allgemeineren Modell.

Im vorangehenden Abschnitt wurde das Modell:

$$(3\text{-}27) \qquad y_{t+1} = \zeta_1 y_t + \zeta_2 z_t$$

betrachtet. Ein solches Modell ist in vielen Fällen zu eng. Folgen z.B. in (3-11a) die ζ_i's nicht dem Gesetz der geometrischen Reihe, oder treten, wie angedeutet, an anderen Stellen Lags auf, dann kann (3-27) nicht mehr angewandt werden. Eine allgemeinere Formulierung ist:

$$(3\text{-}48) \qquad y_t = \zeta_1 y_{t-1} + \zeta_2 y_{t-2} + \ldots + \zeta_m y_{t-m} + \theta_o z_t + \theta_1 z_{t-1} + \ldots \theta_n z_{t-n}$$

Zu einer Gleichung, die formal eine Differenzengleichung erster Ordnung ist, kommen wir, wenn wir (3-48) schreiben als:

$$(3\text{-}49) \qquad \begin{pmatrix} y_t \\ y_{t-1} \\ \vdots \\ y_{t-m+1} \\ z_t \\ \vdots \\ z_{t-n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_m, \theta_1, \ldots, \theta_n \\ 1, 0, \ldots, 0, 0, \ldots, 0 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ 0, \ldots\ldots 1, 0, 0, \ldots, 0 \\ 0, \ldots\ldots\ldots, 0, 0, \ldots, 0 \\ 0, \ldots\ldots\ldots, 0, 1, \ldots, 0 \\ 0, \ldots\ldots\ldots, 0, 0, \ldots, 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{t-1} \\ y_{t-2} \\ \vdots \\ y_{t-m} \\ z_{t-1} \\ \vdots \\ z_{t-n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \theta_o \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} z
$$

und $\vec{y}_t, \zeta, \theta$ so definieren, daß (3-49) geschrieben wird als:

$$(3\text{-}50) \qquad \vec{y}_t = \zeta \vec{y}_{t-1} + \theta z_t$$

θ und $\vec{y}_t$ sind dann (m+n)-Vektoren, und ζ ist eine ((m+n)x(m+n))-Matrix[1]. Entsprechend muß das Kostenfunktional in den neuen Größen geschrieben werden. Das ursprüngliche Kostenfunktional lautete[2]:

$$(3\text{-}51) \qquad K_{ZB} = \sum_{t=1}^{T} (k_1 y_t^2 + k_2 z_t^2)$$

Die Umformulierung kann auf zwei verschiedene Weisen vorgenommen werden. Die einfachere und im allgemeinen vorzuziehende Methode ist die, nur den Größen der jeweiligen Periode Kosten zuzuerkennen. Statt (3-51) wird dann geschrieben:

$$K_{ZB} = \sum_{t=1}^{T} (y_t, y_{t-1}, \ldots, y_{t-m+1}, z_t, \ldots z_{t-n+1}) \begin{pmatrix} k_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & k_2 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_t \\ y_{t-1} \\ \vdots \\ y_{t-m+1} \\ z_t \\ \vdots \\ z_{t-n+1} \end{pmatrix}$$

oder verkürzend in der Schreibweise von (3-50):

$$(3\text{-}52) \qquad K_{ZB} = \sum_{t=1}^{T} \vec{y}_t' \, K \, \vec{y}_t$$

---

1) y_t und z_t in der Bedeutung der Formulierung (3-48) können selbst auch Vektoren sein. Allgemein ist dann dort y_t der Vektor der Zielvariablen und z_t der Vektor der Instrumentvariablen. $\vec{y}_t$ und $\vec{z}_t$ in der Formulierung (3-50) sind dann entsprechend größere Vektoren und gleiches gilt dann für ζ und θ.

2) Im ursprünglichen Kostenfunktional (3-28) wurden die Kosten im Zeitpunkt T vor die Summe gezogen. Das ergab sich aus der speziellen Formulierung von (3-27). In der allgemeinen Formulierung von (3-50) ist diese Sonderbehandlung nicht erforderlich, da die heutige Instrumentvariable auch auf die heutige Zustandsvariable Einfluß hat (bzw. haben kann).

Für die Untersuchung des Problems der Instrumenteninstabilität, auf das weiter unten eingegangen wird, kann es nützlich sein, die Matrix im Kostenfunktional möglichst so zu formulieren, daß sie streng positiv definit ist. Wenn wir K^+ definieren als eine $((m+n)\times(m+n))$-Matrix:

$$K^+ = \begin{pmatrix} \frac{k_1}{m}, & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & \frac{k_1}{m}, & & & & \\ & & & \frac{k_2}{n}, & & & \\ & & & & \ddots & & \\ 0 & & & & & & \frac{k_2}{n}, \end{pmatrix}$$

dann gilt :

$$(3\text{-}53) \qquad K_{ZB} = \sum_{t=1}^{T} (\vec{y}_t' K^+ \vec{y}_t) + \frac{k_1}{m} y_{T-m+2}^2 + \frac{2k_1}{m} y_{T-m+3}^2 + \ldots + \frac{(m-1)k_1}{m} y_T^2$$

$$+ \frac{k_2}{n} z_{T-n+2} + \frac{2k_2}{n} z_{T-n+3} + \ldots + \frac{(n-1)k_2}{n} z_T^2 - \Psi$$

Ψ enthält dabei alle y_t und z_t, die vor t=1 auftreten und gemäß dem Optimalitätsprinzip nicht berücksichtigt werden brauchen, wenn wir nur das Problem von t = 1 ... T beachten[1].

Für die Ableitung der optimalen Politik, die hier behandelt wird, soll allerdings auf die Formulierung (3-50) und (3-52) zurückgegriffen werden. Es wird hier genauso verfahren wie in Abschnitt 3.2.2.).

---

1) Die Aufteilung der Kosten gemäß (3-53) stammt von Turnovsky (1974).

Nach der Bellman-Gleichung ist dann folgende Aufgabe zu lösen[1]:

$$(3\text{-}54) \qquad V(\vec{y}_{t-1},t) = \min_{z_t} (\vec{y}_t' \, K \, \vec{y}_t + V(\vec{y}_t,t+1))$$

Es gelte:

$$(3\text{-}55) \qquad V(\vec{y}_t,t+1) = \vec{y}_t' \, S_{t+1} \, \vec{y}_t$$

In (3-54) eingesetzt:

$$(3\text{-}56) \qquad V(\vec{y}_{t-1},t) = \min_{z_t} (\vec{y}_t' \, (K + S_{t+1}) \, \vec{y}_t)$$

(3-50) in (3-56) eingesetzt:

$$V(\vec{y}_{t-1},t) = \min_{z_t} \left[(\zeta\vec{y}_{t-1} + \theta z_t)'(K + S_{t+1})(\zeta\vec{y}_{t-1} + \theta z_t) \right]$$

$$\frac{\partial V}{\partial z_t} \overset{2)}{=} 2\theta' \, (K + S_{t+1})(\zeta\vec{y}_{t-1} + \theta z_t) = 0$$

Nach z_t aufgelöst:

$$(3\text{-}57) \qquad z_t = - \left[\theta' \, (K + S_{t+1}) \, \theta \right]^{-1} \theta' \, (K + S_{t+1}) \zeta \, \vec{y}_{t-1}$$

$$(3\text{-}58) \qquad z_t = - \Phi_t \, \vec{y}_{t-1}$$

---

1) Die Argumentation ist genau die gleiche wie in 3.2.2). Es ist nur zu beachten, daß wir es jetzt mit Matrizen und Vektoren zu tun haben statt mit Skalaren. Wegen der anderen Schreibweise ist jetzt $V(y_{t-1},t)$ statt $V(y_t,t)$ zu schreiben, da z_t zusammen mit y_{t-1} auftritt und nicht mit y_t.

2) Die Herleitung kann auch über quadratische Ergänzung gemacht werden. Daß die optimale Politik wirklich eine minimierende Politik ist gilt unter der Annahme, daß S_t nichtnegativ definit ist. Das gilt, wenn K nichtnegativ definit ist. (Vgl. (3-60) und (3-62)).

Und damit:

$$(3\text{-}59) \qquad V(\vec{y}_{t-1}, t) = \vec{y}'_{t-1} \; (\zeta - \theta \, \Phi_t)'(K + S_{t+1})(\zeta - \theta \, \Phi_t) \; \vec{y}_{t-1}$$

Mit (3-59) und (3-55) gilt:

$$(3\text{-}60) \qquad S_t = (\zeta - \theta \, \Phi_t)'(K + S_{t+1})(\zeta - \theta \, \Phi_t) \quad 1)$$

Für Periode T gilt:

$$V(\vec{y}_{T-1}, T) = \min_{z_t} (\vec{y}'_T \; K \; \vec{y}_T)$$

$$(3\text{-}61) \qquad = \vec{y}'_{T-1} \; (\zeta - \theta \, \Phi_T)' \; K \; (\zeta - \theta \, \Phi_T) \; \vec{y}_{T-1}$$

Wegen (3-60) gilt:

$$(3\text{-}62) \qquad S_T = (\zeta - \theta \, \Phi_T)'(K + S_{T+1})(\zeta - \theta \, \Phi_T)$$

und damit $S_{T+1} = 0$

---

1) (3-60) kann folgendermaßen umgeformt werden:

$$S_t = \zeta'(K + S_{t+1})\zeta - \zeta'(K + S_{t+1}) \; \theta\Phi_t - \Phi'_t \; \theta'(K + S_{t+1})\zeta$$

$$+ \Phi'_t \; \theta(K + S_{t+1}) \; \theta\Phi_t$$

$$= \zeta'(K + S_{t+1})\zeta - \zeta'(K + S_{t+1}) \; \theta\Phi_t$$

$$0 = \begin{cases} - \zeta'(K + S_{t+1})\theta(\theta'(K + S_{t+1})\theta)^{-1} \; \theta'(K + S_{t+1})\zeta \\ + \zeta'(K + S_{t+1})\theta(\theta'(K + S_{t+1})\theta)^{-1} \; \theta'(K + S_{t+1}) \; \theta. \\ (\theta'(K + S_{t+1})\theta)^{-1} \; \theta(K + S_{t+1}) \; \zeta \end{cases}$$

$$S_t = \zeta' \{ (K + S_{t+1}) - (K + S_{t+1})\theta(\theta'(K + S_{t+1})\theta)^{-1}\theta'(K + S_{t+1}) \} \; \zeta$$

Also gilt die quadratische Form von S_t für t = T. Damit gilt die Annahme (3-55) für t = T und wegen (3-59) für alle t = 1 ... T. Der Beweis ist vollständig.

Für $T \to \infty$ konvergiert $S_t \to S$. D.h. bei unendlich großem Planungshorizont gilt statt (3-60)[1]:

(3-60a) $$S = (\zeta - \theta \Phi)'(K + S)(\zeta - \theta \Phi)$$

und statt (3-57):

(3-57a) $$z_t = - \left[\theta'(K + S)\theta\right]^{-1} \theta'(K + S)\zeta \vec{y}_{t-1}$$

$$z_t = - \Phi \vec{y}_{t-1}$$

Da $\vec{y}_{t-1}$ die Zieldivergenzen der m letzten Perioden und die Interventionen der n letzten Perioden enthält, ist die heutige optimale Politik also von all diesen Größen in proportionaler Weise abhängig. Dabei variieren die Proportionalitätsfaktoren in der Zeit, solange der Planungshorizont nicht unendlich ist. Im Vergleich zu den Bemerkungen von S. 61 muß eine optimal steuernde Zentralbank mehr Größen Beachtung schenken.

3.2.4.) Das Problem der Instrumenteninstabilität.

In den vorangehenden Abschnitten wurden neben den Abweichungen der Zielvariablen von ihren Zielgrößen auch Abweichungen der Instrumentvariablen von ihren Zielwerten mit Kosten belegt. Dies kann etwa damit begründet werden, daß die Variation der Zentralbankgeldmenge Kosten verursacht[2]. Unter diesem Gesichtspunkt empfiehlt es sich als Zielwert den jeweiligen Wert der vor-

---

1) Zum Beweis Anhang III.
2) Die Einführung von Kosten für die Instrumentvariablen kann auch durch Ungewissheit in den Koeffizienten der Nebenbedingungen begründet sein, wie R.H. Gordon (1976) zeigt.

angehenden Periode zu wählen[1)2)]. Eine Begründung für diese Kosten ist die, daß Schwankungen der Zentralbankgeldmenge unerwünschte Nebenfolgen haben, etwa eine Verunsicherung der Banken und Nichtbanken. Dies gilt z.B. dann, wenn die jeweilige Zentralbankgeldmenge von Banken und Nichtbanken als Richtgröße angesehen wird. Wenn die Zentralbank eine langfristige Zentralbankgeldmenge anstrebt[3)], dann können Abweichungen von dieser Größe Kosten verursachen, etwa Kosten die durch die Verunsicherung der Nichtbanken und Banken über diese Politik entstehen.

Derartige Kosten können zunächst als gering erachtet werden im Vergleich zu Abweichungen des Volkseinkommens von seiner Zielgröße. Wenn jedoch die Abweichungen von einer Zielgröße immer mehr zunehmen und gar ins Unendliche wachsen, dann werden auch die Kosten der Intervention gegen unendlich gehen. Wenn man also die Kosten der Intervention vernachlässigt, dann muß gesichert sein, daß große Abweichungen nicht vorkommen. Es zeigt sich aber, daß unter Umständen gerade die Vernachlässigung dieser Kosten dazu führt, daß die Abweichungen der Instrumentvariablen von ihren Zielgrößen unendlich groß werden.

Ein einfaches Beispiel soll die Problematik verdeutlichen[4)]:

Das Kostenfunktional sei

$$(3\text{-}63) \qquad K = \sum_{t=1}^{T} (y_t)^2$$

---

1) Sind die Größen des Modells als Wachstumsraten zu lesen, dann heißt die Zielgröße für z: konstante Wachstumsrate der Zentralbankgeldmenge.
2) In diesem Fall ist K keine Konstante. Es muß vielmehr K_t geschrieben werden.Vgl. Abschnitt 3.3.).
3) Und diese auch als Ziel deklariert.
4) Sowohl Turnovsky (1974) als auch Chow (1973) verwenden ein ähnliches Beispiel zur Demonstration. Turnovsky leitet die optimale Politik nach Abschnitt 3.2.3.) ab mit gleichem Ergebnis wie bei uns.

Die Beziehung zwischen Instrumentvariablen und Zielvariablen sei gekennzeichnet durch

$$(3\text{-}64) \qquad y_t = c_1 z_t + c_2 z_{t-1}$$

In Periode t = 1 sei die einzige Störung ε aufgetreten, auf die die Zentralbank mit

$$z_1 = -\frac{\varepsilon}{c_1}$$

reagiert hat, so daß $y_1 = 0$. Für die nachfolgenden Perioden gilt dann:

$$(3\text{-}65) \qquad z_t = -\frac{c_2}{c_1} z_{t-1}$$

als optimal, da so K = 0. Die Lösung von (3-65) ergibt:

$$z_t = \left(-\frac{c_2}{c_1}\right)^{t-1} z_1$$

Wenn $\frac{c_2}{c_1} > 1$, wird die Instrumentvariable immer größer werden müssen, damit die Beziehung (3-65) erfüllt bleibt[1]. Bei $t \to \infty$ wird sie unendlich. Wenn dies keine Kosten verursacht, wie (3-63) angibt, ist das sicher ohne Bedeutung. Wenn in (3-63) jedoch die Kosten der Abweichungen von z_t von einem Idealwert nur vernachlässigt werden, weil sie als relativ geringfügig erachtet werden, dann hat die Politik (3-65) Folgen, die zunächst nicht genügend gewürdigt werden.

Holbrook und Gramlich[2] haben als erste auf diese Probleme

---

1) Größer ist im absoluten Sinne gemeint. Wenn $|\frac{c_2}{c_1}| > 1$ dann werden die Schwankungen von z_t immer größer.

2) R. Holbrook (1972).
E. Gramlich (1971).

hingewiesen, mit denen sich in der Folge Chow[1] und Turnovsky[1] näher beschäftigten. Während Chow vor allem hervorhebt, daß die Instabilität in einem Instrument so lange unwesentlich ist, als dessen Einsatz Kosten verursacht, und auch allgemein auf den Zusammenhang zwischen Kosten und Stabilität hinweist, verwendet Turnovsky die Methode von Liapunov zur Untersuchung der Stabilitätsbedingungen[2][3]. Dem zweiten Weg soll hier gefolgt werden.

Wählen wir unser System als

$$\vec{y}_t = \zeta \vec{y}_{t-1} + \theta z_t$$

$$K_{ZB} = \sum_{t=1}^{\infty} \vec{y}_t' K^+ \vec{y}_t$$

mit K^+ (aus Abschnitt 3.2.3.)) als positiv definit. Die Lösung für das Problem ist nach (3-57a)

$$z_t = -\left[\theta' S^+ \theta\right]^{-1} \theta' S^+ \zeta \vec{y}_{t-1}$$

---

1) G. Chow (1973)
S. Turnovsky (1974). Beide Autoren behandeln auch Probleme der Stabilität in stochastischen Systemen. Mit solchen beschäftigt sich auch C. Sims (1974).

2) Wir verwenden ein etwas anderes Kostenfunktional als Turnovsky. Hat man z.B. die Beziehung:

$$y_t = a_0 y_{t-1} + b_0 z_{t-1} + b_1 z_t$$

$$\sum_{t=1}^{\infty} (k_1 y_t^2 + k_2 z_t^2)$$

dann gilt in der Umschreibung

$$\begin{pmatrix} y_t \\ z_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{t-1} \\ z_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ 1 \end{pmatrix} z_t$$

und das Kostenfunktional

$$\sum_{t=1}^{\infty} \left[(y_t, z_t) \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_t \\ z_t \end{pmatrix}\right]$$ und nicht wie bei Turnovsky

$$\sum_{t=1}^{\infty} \left[(y_t, z_t) \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_t \\ z_t \end{pmatrix}\right] + \sum_{t=1}^{\infty} k_2 z_t^2 \quad .$$

3) Zur Methode von Liapunov bei Differenzengleichungen vgl. W. Hahn (1958)

mit $S^+ = K^+ + S$

und wegen (3-60a)

(3-66) $S^+ = K^+ + (\zeta - \theta\Phi)' S^+ (\zeta - \theta\Phi)$

Unter der Bedingung, daß K^+ positiv definit ist, d.h. alle Zielvariablen- und Instrumentvariablenabweichungen von ihren Zielwerten mit Kosten belegt werden, ist wegen (3-60a) auch S^+ positiv definit. Damit kann $V_t = \vec{y}_t' S^+ \vec{y}_t$ als Liapunov-Funktion dienen. Wegen $\vec{y}_t = \zeta \vec{y}_{t-1} + \theta z_t$ und der optimalen Lösung für z_t gilt:

(3-67) $\vec{y}_t = (\zeta - \theta\Phi)\ \vec{y}_{t-1}$

Damit folgt

(3-68) $V_t - V_{t-1} = \vec{y}_{t-1}' ((\zeta - \theta\Phi)' S^+ (\zeta - \theta\Phi) - S^+)\ \vec{y}_{t-1}$

$$= - \vec{y}_{t-1}' K^+ \vec{y}_{t-1} < 0$$

Daraus folgt, daß mit $t \to \infty$ $\vec{y}_t \to 0$ geht. Da $\vec{y}_t$ sowohl die Ziel- als auch die Instrumentvariablen enthält, ist für beide gesichert, daß sie gegen ihre Zielwerte gehen. Ist K^+ nur positiv semidefinit, dann kann aus (3-66) nur gezeigt werden, daß auch S^+ positiv semidefinit ist. Damit kann V_t nicht mehr als Liapunov-Funktion verwendet werden, und die Stabilität kann somit nicht mehr bewiesen werden[1]. Für den Sonderfall, daß in (3-48) $z_{t-i}=0$ $i = 1,\ldots,n$ ist, taucht keine Instrumentvariable im y_t der Formulierung

---

1) D.h. nicht, daß keine Stabilität herrscht. Beachtet man etwa den Fall (3-63), (3-64) für den die Stabilität mit Hilfe von Liapunov nicht nachgewiesen werden kann, dann sieht man, daß dort im Falle $c_2 < c_1$ auch für die Instrumentvariable Stabilität vorliegt.

(3-49) mehr auf[1]. Auch wenn $k_2 = 0$ ist, bleibt K^+ positiv definit. Der Stabilitätsbeweis von oben garantiert dann zunächst jedoch nur, daß die Zielvariable gegen ihren Zielwert strebt. Da aber die optimale Instrumentenvariable eine lineare Funktion der Zielvariablen ist, gilt auch, daß $z_t \to 0$, bzw. $Z_t \to Z^*$. Dabei spielt es keine Rolle für den Stabilitätsbeweis, ob $k_2 > 0$ oder $k_2 = 0$ ist. Damit ist in diesem Sonderfall auch die Stabilität insgesamt gesichert.

3.3.) Geldpolitik bei autonomen Geschäftsbanken.

3.3.1.) Modelle mit autonomen Geschäftsbanken.

Bis jetzt wurden zwei Arten von Modellen behandelt: Solche, in denen die Zentralbank eindeutig dominiert, und solche, in denen der Zentralbank (fast) gleichberechtigt die Geschäftsbanken gegenüberstanden. Letzteres wurde im Modell der Spielsituation dargestellt, ersteres im Modell des Geldschöpfungsmultiplikators mit und ohne Überschußreserven. Im Falle der dominierenden Rolle der Zentralbank wird angenommen, daß die Geschäftsbanken sich in genau vorgegebener, der Zentralbank bekannter Weise verhalten. Dies wird im Modell des dynamischen Geldschöpfungsmultiplikators deutlich: Die durch die Zentralbank induzierten Überschußreserveänderungen werden in einer bestimmten Weise abgebaut. Der Unterschied zum Spielmodell des Abschnitts 2.3.) besteht also nicht darin, daß die Geschäftsbanken auf Aktionen der Zentralbank nicht reagieren, sondern daß sie in einer der Zentralbank bekannten Weise reagieren und somit von der Zentralbank mit eingeplant

---

1) In diesem Falle ist die Formulierung $\Sigma \vec{y}_t' K^+ \vec{y}_t$ durch $\Sigma \vec{y}_t' K^+ \vec{y}_t + \Sigma k_2 z_t^2$ zu ersetzen.

werden kann. Dafür ist erforderlich, daß die Geschäftsbanken nicht die Strategie der Zentralbank selbst mit in ihr Kalkül ziehen. Die Lage ähnelt der einer Stackelbergsituation im Duopol, wobei das Instrument der Geschäftsbanken die Überschußreserven darstellen, und die Bestimmungsgleichung für diese U_t den Charakter einer Reaktionsgleichung der Geschäftsbanken besitzt , denn der Zinssatz i_t ist in großem Maße abhängig von der Politik der Zentralbank. Durch die dominante Stellung der Zentralbank ist jedoch diese Spielsituation nur undeutlich ausgeprägt. Es stellen sich, wie sich gezeigt hat, der Zentralbank in diesen Modellen keine Schwierigkeiten wie bei dem Modell des Abschnitts 2.3.) gegenüber.

Das Modell mit Überschußreserven verändert jedoch seinen Charakter, wenn die Zentralbank nicht weiß, nach welcher Regel die Geschäftsbanken ihre Überschußreserven festlegen. Es ist die Frage, ob die optimale Zentralbankgeldmenge gewählt werden muß bevor die Überschußreserven der Periode bekannt sind oder nachher.

Die gleiche Situation entsteht im Modell des Abschnitts 2.3.), in dem D die Instrumentvariable der Geschäftsbanken ist, wenn die Zentralbank nicht weiß, nach welchen Gesichtspunkten die Geschäftsbanken D^a aussuchen.

Die Schwäche der Zentralbank liegt in beiden Fällen in ihrer fehlenden Erwartungsbildung über das Geschäftsbankenverhalten begründet. In beiden Fällen leiten wir Reaktionsfunktionen der Zentralbank ab in Unkenntnis der Strategie der Geschäftsbanken. Überlegungen über die Reaktionsfunktion der Zentralbank können auch von den Geschäftsbanken angestellt werden, mit dem Ergebnis, daß statt einer Cournot-Lösung von den Geschäftsbanken eine Stakkelberg-Lösung angestrebt wird. In beiden Fällen, sowohl wenn U_t

als auch wenn D_t die Instrumentvariablen der Geschäftsbanken sind, kann die Zentralbank die Handlungsfreiheit der Geschäftsbanken so einschränken, daß U_t bzw. D_t ihr schon vorher bekannt sind. Im Falle der Überschußreserven kann die Zentralbank eine derart restriktive Politik durchsetzen, daß die Überschußreserven verschwinden. Im Modell mit D_t als Instrumentvariable ist D_t bekannt, wenn die optimalen Einlagen der Geschäftsbanken auf oder unterhalb der ID-Linie liegen (Abb. 1). Abgesehen davon, ob eine solche Politik auf längere Sicht überhaupt möglich ist, muß beachtet werden, ob sie wirklich gewünscht wird. Denn das Ziel der Beschränkung der Handlungsfreiheit ist nur sinnvoll unter gleichzeitiger Einhaltung des eigentlichen Ziels der Steuerung des Volkseinkommens. Beides wird sich aber, insbesondere bei expansiver Politik, nicht miteinander verbinden lassen.

Wenn wir im folgenden Abschnitt nur ein Modell mit Bankeinlagen D_t als Variable wählen, so nur deshalb, weil auch in späteren Betrachtungen ein derartiges Modell verwendet wird. Analoge Überlegungen gelten jedoch auch für ein Modell mit Überschußreserven.

Es gilt nun das Modell des Abschnitts 2.3.1.) zu dynamisieren. Wie früher bemerkt, bieten sich hier viele Möglichkeiten und Begründungen an. Eine Möglichkeit wäre, in Nachfolge von Tobin und Brainard, die Beziehungen (2-13) mit Hilfe von Bestandsanpassungshypothesen in ein dynamisches Modell umzuwandeln[1]. Wir begnügen uns damit, die Konsumfunktion mit einem Robertson-Lag zu schreiben und für die Investitionsnachfrage einen Bestandsanpassungsprozeß im Sinne von Jorgenson anzunehmen, wobei allerdings der gewünschte Kapitalstock K_t^* in linearer Weise

1) Vgl. J. Tobin and W. Brainard (1968).

vom r_K abhängt[1]. In Anlehnung an (2-4) bis (2-7) und (2-15a) gilt dann[2)3)]:

(3-69) $C_t = g_o + g_1 Y_{t-1}$

(3-70) $I_t = e_2 (K_t^* - K_{t-1})$

(3-71) $K_t^* = e_o - e_1 r_{K,t}$

(3-72) $r_{K,t} = \alpha_{02} - \alpha_{12} Z_t - \alpha_{22} (\imath) D_t$

(3-73) $Y_t = C_t + I_t$

$Y_t = g_o + g_1 Y_{t-1} + e_2 (e_o - e_1 (\alpha_{02} - \alpha_{12} Z_t - \alpha_{22}(\imath)D_t) - K_{t-1})$

(3-74) $Y_t = g_o + e_2 e_o - e_2 e_1 \alpha_{02} + g_1 Y_{t-1} + e_2 e_1 \alpha_{12} Z_t + e_2 e_1 \alpha_{22}(\imath) D_t$

$- e_2 K_{t-1}$

(3-74) um eine Periode verzögert und von (3-74) subtrahiert, ergibt

$Y_t - Y_{t-1} = g_1 (Y_{t-1} - Y_{t-2}) + e_1 e_2 \alpha_{12} (Z_t - Z_{t-1}) + e_1 e_2 \alpha_{22} (\imath) (D_t - D_{t-1})$

$- e_2 (K_{t-1} - K_{t-2})$

Mit $I_t = K_t - K_{t-1}$, (3-69) und (3-73) gilt dann:

$Y_t - Y_{t-1} = g_1 Y_{t-1} - g_1 Y_{t-2} + e_1 e_2 \alpha_{12} (Z_t - Z_{t-1}) + e_1 e_2 \alpha_{22} (\imath) (D_t - D_{t-1})$

$- e_2 (Y_{t-1} - g_o - g_1 Y_{t-2})$

---

1) D. Jorgenson (1965)
2) Es ergibt sich damit eine Differenzengleichung zweiter Ordnung, deren Lösung zyklisch sein kann.
3) Die Dynamisierung des Realteils führt hier zu einer Beziehung zwischen Y-Werten der Gegenwart und der Vergangenheit.

$$Y_t = (1 + g_1 - e_2)\, Y_{t-1} + (e_2\, g_1 - g_1)\, Y_{t-2} + e_1 e_2 \alpha_{12} (Z_t - Z_{t-1})$$

$$+ e_1 e_2 \alpha_{22}(1)(D_t - D_{t-1}) + e_2\, g_o$$

Oder umgeschrieben:

$$(3\text{-}75) \quad \begin{pmatrix} Y_t \\ Y_{t-1} \\ z_t \\ d_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+g_1-e_2), (e_2 g_1 - g_1), & 0, & 0 \\ 1 \quad , \quad 0 \quad , & 0, & 0 \\ 0 \quad , \quad 0 \quad , & 0, & 0 \\ 0 \quad , \quad 0 \quad , & 0, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{t-1} \\ Y_{t-2} \\ z_{t-1} \\ d_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_1 e_2 \alpha_{12} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} z_t$$

$$+ \begin{pmatrix} e_1 e_2 \alpha_{22}(1) \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} d_t + \begin{pmatrix} e_2 g_o \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit $z_t = Z_t - Z_{t-1}$ $\qquad$ $d_t = D_t - D_{t-1}$

Vereinfachend wird (3-75) geschrieben als

$$(3\text{-}76) \qquad \vec{Y}_t = \xi_o\, \vec{Y}_{t-1} + \xi_1\, z_t + \xi_2\, d_t + \xi_3$$

mit der Umdefinition der notwendigen Größen. In (3-76) sind nicht das Zentralbankgeldangebot und das Einlageangebot als Instrumentvariable aufgeführt, sondern die jeweiligen Veränderungen. Diese Beziehung stellt nun die dynamische Beziehung

dar, die bei der folgenden Politik beachtet werden muß.

3.3.2.) Die optimale Zentralbankpolitik in einem Modell mit autonomen Geschäftsbanken und variablen Zielgrößen.

Bevor wir zur eigentlichen Problemlösung kommen, soll noch kurz auf variable Zielgrößen eingegangen werden. Schon in früheren Abschnitten, etwa 3.2.4.), wurde als Zielgröße der Zentralbankgeldmenge die Größe der Vorperiode in Erwägung gezogen, also eine in der Regel sich verändernde Größe. Auch in späteren Abschnitten[1)] ergeben sich Probleme mit nicht konstanten Zielgrößen. Die daraus entstehenden Modifikationen für die Lösung sind ähnlich denen, die sich aus der Berücksichtigung von D_t, als eine von der Zentralbank nicht (oder nur zum Teil) zu steuernde Größe, ergeben. Aus diesem Grunde sollen beide Erscheinungen hier zusammen behandelt werden.

Unsere Aufgabe lautet danach:

$$(3\text{-}77) \qquad \text{Min } K_{ZB} = \sum_{t=1}^{T} (\vec{Y}_t - \vec{Y}^*_t)' K (\vec{Y}_t - \vec{Y}^*_t) = \sum_{t=1}^{T} (\vec{Y}_t' K \vec{Y}_t - 2\vec{Y}_t' K \vec{Y}^*_t + \vec{Y}^{*\prime}_t K \vec{Y}^*_t)$$

unter der Nebenbedingung

$$(3\text{-}76) \qquad \vec{Y}_t = \xi_o \vec{Y}_{t-1} + \xi_1 z_t + \xi_2 d_t + \xi_3$$

Die Lösung erfolgt analog zu den Abschnitten 3.2.2.) und 3.2.3.) mit Hilfe des Optimalitätsprinzips, insbesondere der Bellman - Gleichung:

---

1) Vgl. Abschnitt 3.4.)

Für den Zeitpunkt t kann die Bellman-Gleichung aufgestellt werden:

$$(3\text{-}78) \qquad V(\vec{Y}_{t-1},t) = \min_{z_t} \{ \vec{Y}_t' K \vec{Y}_t - 2\vec{Y}_t' K \vec{Y}_t^* + \vec{Y}_t^{*\prime} K \vec{Y}_t^* + V(\vec{Y}_t,t+1) \}$$

Es gelte

$$(3\text{-}79) \qquad V(\vec{Y}_t,t+1) = \vec{Y}_t' S_{t+1} \vec{Y}_t - 2\vec{Y}_t' s_{t+1} + c_{t+1}$$

Aus (3-78) und (3-79) folgt:

$$(3\text{-}80) \qquad V(Y_{t-1},t) = \min_{z_t} \{\vec{Y}_t'(K + S_{t+1})\vec{Y}_t - 2\vec{Y}_t'(K\vec{Y}_t^* + s_{t+1}) + \vec{Y}_t^{*\prime} K \vec{Y}_t^* + c_{t+1}\}$$

$$= \min_{z_t} \{(\xi_o \vec{Y}_{t-1} + \xi_1 z_t + \xi_2 d_t + \xi_3)'(K+S_{t+1}) (\xi_o \vec{Y}_{t-1} + \xi_1 z_t + \xi_2 d_t + \xi_3) - 2(\xi_o \vec{Y}_{t-1} + \xi_1 z_t + \xi_2 d_t + \xi_3)'(K\vec{Y}_t^* + s_{t+1}) + \vec{Y}_t^{*\prime} K \vec{Y}_t^* + c_{t+1}\}$$

$$\frac{\partial V}{\partial z_t} = 2\xi_1'(K+S_{t+1})(\xi_o \vec{Y}_{t-1} + \xi_1 z_t + \xi_2 d_t + \xi_3) - 2\xi_1'(K\vec{Y}_t^* + s_{t+1}) = 0$$

$$(3\text{-}81) \qquad z_t = -(\xi_1'(K+S_{t+1})\xi_1)^{-1} \xi_1'(K+S_{t+1})\xi_o \vec{Y}_{t-1} - (\xi_1'(K+S_{t+1})\xi_1)^{-1} \xi_1' [(K+S_{t+1})(\xi_2 d_t + \xi_3) - (K\vec{Y}_t^* + s_{t+1})]$$

$$(3\text{-}82) \qquad = \Phi_{1,t} \vec{Y}_{t-1} + \Phi_{2,t}$$

(3-81) bzw. (3-82) stellt die optimale Politik dar für Periode

t. Es sind nun die Größen S_{t+1}, s_t und c_t zu bestimmen. (3-82) erfüllt aus ihrer Ableitung [1] die Bellman-Gleichung (3-78) bzw. (3-80). Damit gilt:

$$
\begin{aligned}
V(\vec{Y}_{t-1},t) = \{ & (\xi_o \vec{Y}_{t-1} + \xi_1 (\Phi_{1,t} \vec{Y}_{t-1} + \Phi_{2,t}) + \xi_2 d_t + \xi_3)' (K+S_{t+1}) \\
& (\xi_o \vec{Y}_{t-1} + \xi_1 (\Phi_{1,t} \vec{Y}_{t-1} + \Phi_{2,t}) + \xi_2 d_t + \xi_3) \\
& -2 (\xi_o \vec{Y}_{t-1} + \xi_1 (\Phi_{1,t} \vec{Y}_{t-1} + \Phi_{2,t}) + \xi_2 d_t + \xi_3)' (K\vec{Y}_t^* + s_{t+1}) \\
& + \vec{Y}_t^{*\prime} K \vec{Y}_t^* + c_{t+1} \}
\end{aligned}
\tag{3-83}
$$

Unter der Beachtung von

$$\xi_o' (K+S_{t+1}) \xi_1 \Phi_{2,t} = -(\xi_1 \Phi_{1,t})' (K+S_{t+1}) \xi_1 \Phi_{2,t}$$

$$\xi_o' (K+S_{t+1}) \xi_1 \Phi_{2,t} = \xi_o' (K+S_{t+1}) \xi_1 (\xi_1' (K+S_{t+1}) \xi_1)^{-1} \xi_1' (K+S_{t+1}) \xi_1 \Phi_{2,t}$$

gilt für (3-83):

$$
\begin{aligned}
V(\vec{Y}_{t-1},t) = \{ & \vec{Y}_{t-1}' (\xi_o + \xi_1 \Phi_{1,t})' (K+S_{t+1}) (\xi_o + \xi_1 \Phi_{1,t}) \vec{Y}_{t-1} \\
& - 2 \vec{Y}_{t-1}' (\xi_o + \xi_1 \Phi_{1,t})' \left[(K\vec{Y}_t^* + s_{t+1}) - (K+S_{t+1}) (\xi_2 d_t + \xi_3) \right] \\
& - 2 (\xi_1 \Phi_{2,t} + \xi_2 d_t + \xi_3)' (K\vec{Y}_t^* + s_{t+1}) + \vec{Y}_t^{*\prime} K \vec{Y}_t^* + c_{t+1} \\
& + (\xi_1 \Phi_{2,t} + \xi_2 d_t + \xi_3)' (K+S_{t+1}) (\xi_1 \Phi_{2,t} + \xi_2 d_t + \xi_3) \}
\end{aligned}
\tag{3-83a}
$$

---

1) Ähnliche Überlegungen wie in den Abschnitten 3.2.2.) und 3.2.3.) sichern, daß es sich tatsächlich um ein Minimum handelt.

Mit (3-79) und (3-83a) folgt:

$$(3\text{-}84) \qquad S_t = (\xi_o + \xi_1 \Phi_{1,t})'(K+S_{t+1})(\xi_o + \xi_1 \Phi_{1,t})$$

$$(3\text{-}85) \qquad s_t = (\xi_o + \xi_1 \Phi_{1,t})' \left[(KY_t^* + s_{t+1}) - (K+S_{t+1})(\xi_2 d_t + \xi_3)\right]$$

$$(3\text{-}86) \qquad c_t = (\xi_1 \Phi_{2,t} + \xi_2 d_t + \xi_3)'(K+S_{t+1})(\xi_1 \Phi_{1,t} + \xi_2 d_t + \xi_3)$$

$$- 2(\xi_1 \Phi_{2,t} + \xi_2 d_t + \xi_3)'(KY_t^* + s_{t+1}) + Y_t^{*\prime} KY_t^* + c_{t+1}$$

Es sind jetzt noch die Anfangsbedingungen für diese drei Beziehungen zu finden. Unter Verwendung von (3-82) gilt in Periode T:

$$V(\vec{Y}_{T-1}, T) = \vec{Y}_{T-1}'(\xi_o + \xi_1 \Phi_{1,T})'K(\xi_o + \xi_1 \Phi_{1,T})\vec{Y}_{T-1}$$

$$- 2\vec{Y}_{T-1}'(\xi_o + \xi_1 \Phi_{1,T})' \left[K\vec{Y}_T^* - K(\xi_2 d_T + \xi_3)\right]$$

$$+ (\xi_1 \Phi_{2,T} + \xi_2 d_T + \xi_3)'K(\xi_1 \Phi_{2,T} + \xi_2 d_T + \xi_3)$$

$$- 2(\xi_1 \Phi_{2,T} + \xi_2 d_T + \xi_3)'K\vec{Y}_T^* + \vec{Y}_T^{*\prime} K\vec{Y}_T^*$$

Dabei wurde wieder beachtet, daß

$$(\xi_o + \xi_1 \Phi_{1,T})'K \xi_1 \Phi_{2,T} = 0$$

Daraus folgt zusammen mit (3-79):

$$(3\text{-}87) \qquad S_T = (\xi_o + \xi_1 \Phi_{1,T})'K(\xi_o + \xi_1 \Phi_{1,T})$$

$$(3\text{-}88) \qquad s_T = (\xi_o + \xi_1 \Phi_{1,T})' \left[K\vec{Y}_T^* - K(\xi_2 d_T + \xi_3)\right]$$

$$(3\text{-}89) \qquad c_T = (\xi_1 \Phi_{2,T} + \xi_2 d_T + \xi_3)' K(\xi_1 \Phi_{2,T} + \xi_2 d_T + \xi_3)$$

$$- 2(\xi_1 \Phi_{2,T} + \xi_2 d_T + \xi_3)' K\vec{Y}_T^* + \vec{Y}_T^{*\prime} K\vec{Y}_T^*$$

und daraus unmittelbar

$$S_{T+1} = 0 \quad ; \quad s_{T+1} = 0 \quad ; \quad c_{T+1} = 0$$

Die optimale Politik ist also bestimmt durch (3-82) bzw. (3-81), wobei S_t, s_t, c_t bestimmt werden durch die Differenzengleichungen (3-84), (3-85), (3-86) mit den Anfangsbedingungen (3-87), (3-88) und (3-89)[1]. Wieder ist die optimale Politik proportional zur Größe der Zielvariablen in der Vorperiode. Zusätzlich tritt aber jetzt noch ein Glied auf.

Welche grundlegenden Unterschiede sich jetzt gegenüber dem alten Modell ergeben, kann aus dieser Lösung abgelesen werden. Zunächst sieht man, daß zur Bestimmung von S_{t+1}, s_{t+1}, c_{t+1} und damit zur Bestimmung von $\Phi_{1,t}$ und $\Phi_{2,t}$ die Größen $\vec{Y}^*_{t+1} \ldots \vec{Y}^*_T$ und $d_{t+1} \ldots d_T$ bekannt sein müssen. Die optimale Politik in Periode t kann also nur bestimmt werden, wenn die Zielgrößen und die Einlageveränderungen bis zum Ende des Planungshorizontes bekannt sind. Das ist insbesondere für die Einlageveränderung eine sehr schwerwiegende Forderung. Man kann sehen, welch große Bedeutung es für eine Zentralbank, die eine längerfristige optimale Politik betrei-

---

1) Damit diese Lösung auch tatsächlich zu einer Minimierung des Kostenfunktionals führt, muß gelten: $(\xi_1'(K+S_{t+1})\xi_1)^{-1} > 0$. Vgl. dazu auch Abschnitt 4.3.1.).

ben will, hat, Regeln zu kennen, nach denen die Geschäftsbanken sich verhalten. Solange dies nicht gegeben ist, muß die Zentralbank entweder im Rahmen eines deterministischen Systems mit erwarteten Werten rechnen, oder aber das Modell ist als stochastisches System zu formulieren. Das wird im Abschnitt 3.5.) erfolgen.

Ein zweiter Unterschied ergibt sich für den Fall, daß T gegen Unendlich geht. Im Falle variierender $\vec{Y}_t^*$ und d_t zeigt sich aus (3-85) und (3-81), daß sich hier keine konstante Politik ergeben kann, da $\Phi_{2,t}$ von $\vec{Y}_t^*$, d_t und s_{t+1} abhängt. Dies gilt, wie man leicht sieht, auch dann, wenn die anderen Größen, die bis jetzt als konstant angesehen wurden, also die Parameter von (3-76) und die Matrix K, die die Kosten gewichtet[1], variabel sind.

3.4.) Ein Modell des Geschäftsbankenverhaltens bei autonomer Zentralbank.

3.4.1.) Die Bedeutung des Modells.

Bis jetzt wurde vor allem die Zentralbank betrachtet und unter verschiedenen Annahmen optimale Politiken für diese hergeleitet. Nur in Abschnitt 2.3.) wurde explizit das Geschäftsbankenverhalten berücksichtigt, d.h. aus einer Gewinnfunktion und gewissen Nebenbedingungen das Handeln der

---

1) Das gilt allerdings dann nicht, wenn mit abdiskontierten Kosten gerechnet wird, also $K_t = \rho^t K$. In diesem Falle gilt für $T \to \infty$ durchaus noch, daß eine konstante Politik sich ergibt. Der Beweis kann analog wie in Anhang III geführt werden.

Geschäftsbanken erklärt. Die Geschäftsbankpolitik im Falle der Überschußreserven wurde dagegen nur vage begründet. Da wir den Geschäftsbanken eine eigenständige Rolle im Prozeß des Geldangebots zugebilligt haben, müssen wir ihr Verhalten auch genauer berücksichtigen. Im Abschnitt 2.3.) geschah dies nur im Rahmen eines statischen Modells. Jetzt soll die Zeit eingeführt werden.

Im vorangehenden Abschnitt 3.3.2.) wurde deutlich, wie wichtig es für die Politik der Zentralbank ist, das Verhalten der Geschäftsbanken zu kennen. Es ist deshalb nicht verwunderlich, wenn auch die Zentralbank ein Interesse daran hat, dieses Verhalten zu kennen. In spieltheoretischer Sicht ist es das Verlangen der Zentralbank die Reaktionskurve der Geschäftsbanken zu erforschen, um sich in die Lage des Führers in einer Stackelberg-Lösung zu versetzen. Die hier anzustellenden Überlegungen sind demnach für beide Agenten gleich interessant.

Die gesamtwirtschaftlichen Zusammenhänge wurden in (3-76) derart beschrieben, daß die Veränderung der Zentralbankgeldmenge und die Veränderung der Einlagen bei den Banken zusammen mit dem Volkseinkommen der Vorperiode das gegenwärtige Volkseinkommen bestimmen. Im Falle, daß die Geschäftsbanken sich ihrer gesamtwirtschaftlichen Bedeutung bewußt sind, werden sie diese Beziehung beachten. Aus welchem Grund? Unter unseren Annahmen wollen sie mit ihrem Instrument d_t die Größe $\vec{Y}_t$ nicht beeinflussen. Vielmehr ist es ihr Ziel, ihren Gewinn, der nicht vom Volkseinkommen abhängt, zu maximieren. Das Instrument, das ihnen zur Erreichung dieses Zieles zur Verfügung steht ist d_t, mit dem sie aber unabsichtlich, das gilt zumindest in unserem Modell, $\vec{Y}_t$ beeinflussen. Ihr Gewinn ist aber abhängig von Z_t.

Dieses Z_t bzw. z_t wird von der Zentralbank aber so gewählt, daß die Kostenfunktion der Zentralbank, die unter anderem einen Zielwert für Y_t enthält, minimiert wird. Dabei kann sich ein indirekter Interessenkonflikt zwischen Zentralbank und Geschäftsbank ergeben[1]. Die Zusammenhänge sind,wie damit noch einmal klar wird, nicht symmetrisch. Beachten die Geschäftsbanken bei der Herleitung ihrer optimalen Politik (3-76) (d.h. die Wirkung ihrer Politik auf Y), dann kann das zu einer Zusammenarbeit mit der Zentralbank beitragen[2].

Im Modell des folgenden Abschnitts soll das nicht der Fall sein. Hier wird zwar von den Geschäftsbanken erkannt, daß ihr Gewinnfunktional bzw. Kostenfunktional von der Wahl des Z_t durch die Zentralbank abhängt. Wodurch aber die Zentralbankpolitik bestimmt wird, sei den Banken unbekannt, insbesondere erachten sie ihren Einfluß in (3-76) derart gering, daß sie ihre indirekte Einflußmöglichkeit auf die Zentralbankpolitik nicht berücksichtigen.

3.4.2.) Die Beschreibung des Modells.

Das Ziel der Geschäftsbanken ist es, ihren Gewinn innerhalb ihres Planungshorizontes zu maximieren. Bei den bisher behandelten Modellen wurden immer Kosten minimiert, statt Gewinne maximiert. Das soll auch der Einfachheit halber beibehalten

---

1) Vgl. dazu Abschnitt 2.3.2.) S. 17 ff.

2) Es sei betont, daß es sich hier nur um eines von vielen möglichen Modellen handelt, das ein Problem der optimalen Zentralbankpolitik verdeutlichen soll. Es ist durchaus denkbar, daß auch die Geschäftsbanken ein bestimmtes Einkommen anstreben (vgl. Fußnote 2) S. 23), eventuell auch das Vollbeschäftigungseinkommen Y^*. In diesem Fall nähern sich die Kostenfunktionale der Geschäftsbanken und der Zentralbank einander an.

werden. Statt den Gewinn zu maximieren, werden wir deshalb den negativen Gewinn, den wir mit K_{GB} bezeichnen, minimieren. Für den Gewinn in Periode t gilt:

$$(3\text{-}90) \qquad G_t = r_{B,t}B_t - r_{D,t}D_t - \text{const.} = (1-\tau_t)r_{B,t}D_t - r_{D,t}D_t - \text{const.}$$

Die Gewinndefinition entspricht nahezu vollständig der Definition in (2-19). Allerdings werden auch noch weitere Kosten, etwa Personalkosten etc. mit aufgenommen. Die Größen sind gleich definiert wie in Abschnitt 2.3.), allerdings jeweils auf eine Periode t bezogen. Wie dort werden auch die Zinssätze aus einem System wie (2-13) bestimmt, allerdings auch jetzt wieder auf eine Periode t bezogen. Setzt man für die Zinssätze ein und schreibt etwas um, dann gilt:

$$G_t = \left\langle (1-\tau_t)(\alpha_{03} - \alpha_{13}Z_t) - \alpha_{01} + \alpha_{11}Z_t \right\rangle D_t$$

$$- \left\langle \alpha_{23}(1-\tau_t) + \alpha_{21} \right\rangle D_t^2 - \text{const.}$$

Und für $K'_{GB,t}$ gilt nach obiger Definition

$$(3\text{-}91) \qquad K'_{GB,t} = \left\langle \alpha_{23}(1-\tau_t) + \alpha_{21} \right\rangle D_t^2 - \left\langle (1-\tau_t)(\alpha_{03} - \alpha_{13}Z_t) \right.$$

$$\left. - \alpha_{01} + \alpha_{11}Z_t \right\rangle D_t + \text{const.}$$

In der allgemeinen Formulierung der linear-quadratischen Modelle wird der Kostenausdruck geschrieben als:

$$K_t = (x_t - x_t^*)' K_1 (x_t - x_t^*) = x_t' K_1 x_t - 2x_t' K_1 x_t^* + x_t^{*'} K_1 x_t^*$$

wobei x_t^* der Zielwert des Vektors x_t ist und K_1 die Gewich-

tung der Abweichungen der einzelnen Elemente des Vektors angibt, oder

$$(3\text{-}92) \qquad K_t = k_1 x_t^2 - 2k_1 x_t^* x_t + k_1 x_t^{*2} = k_1 (x_t^* - x_t)^2$$

wenn x_t ein Skalar ist. Ein Koeffizientenvergleich mit (3-91) ergibt dann:

$$k_1 \equiv (\alpha_{23}(1-\iota_t) + \alpha_{21})$$

$$2k_1 x_t^* \equiv ((1-\iota_t)(\alpha_{03} - \alpha_{13} Z_t) - \alpha_{01} + \alpha_{11} Z_t)$$

Daraus kann x_t^* errechnet werden. Es ist also möglich (3-91) in der Form (3-92) zu schreiben. Dabei gilt, daß x_t^* sich dann in der Zeit verändert, wenn Z_t oder ι_t sich in der Zeit verändern, und K_1 sich in der Zeit verändert, also $K_{1,t}$ geschrieben werden muß, wenn ι_t sich verändert. Unter der Annahme $(\alpha_{11} - (1-\iota)\alpha_{13}) > 0$ gilt [1], daß $\frac{x_t^*}{Z_t} > 0$, d.h. eine Ausweitung der Geldmenge die Zielgröße Z_t erhöht und umgekehrt. Die Gewinn- bzw. Kostenfunktion hat dann folgendes Bild:

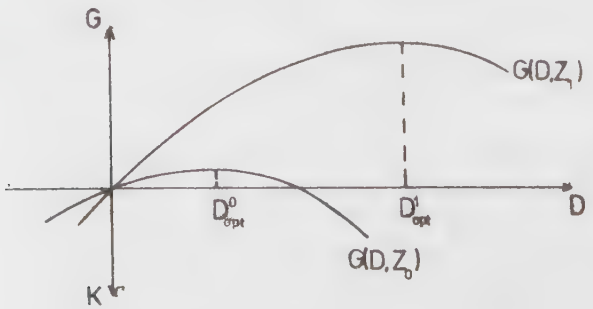


Abbildung III

1) Diese Annahme wurde auch in 2.3.) getroffen.

Man sieht, daß bei $Z_1 > Z_o$ $D^1_{opt} > D^o_{opt}$. Eine Erhöhung der Zentralbankgeldmenge führt also zu einem höheren erstrebenswerten Einlagevolumen. Es ist damit zu erwarten, daß bei einer Erhöhung der Zentralbankgeldmenge d_t steigt, um den neuen Optimalpunkt zu erreichen.

Wir nehmen an, daß ι konstant ist, bzw. die Geschäftsbanken ι als konstant ansehen, die Zentralbankgeldmenge aber variiert wird, d.h. also K_1 fest ist und x^*_t sich verändert.

Im dynamischen Modell soll jetzt noch angenommen werden, daß die Veränderung der Einlagen durch die Bank Kosten verursacht, d.h. Interventionskosten auftreten. Wenn wir schreiben:

$$d_t = D_t - D_{t-1}$$

dann gilt für das gesamte Kostenfunktional der Geschäftsbanken

$$(3\text{-}93) \qquad K_{GB} = \sum_{t=1}^{T} \left[k_1 D_t^2 - 2x^*_t k_1 D_t + k_2 d_t^2 + \text{const} \right]$$

und für die Nebenbedingungen:

$$(3\text{-}94) \qquad D_t = D_{t-1} + d_t$$

Das ganze Problem lautet dann:

$$(3\text{-}95) \quad \text{Min } K_{GB} = \sum_{t=1}^{T} \left[(D_t, d_t) \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_t \\ d_t \end{pmatrix} - 2(D_t, d_t) \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^*_t \\ 0 \end{pmatrix} + \text{const.} \right]$$

unter der Nebenbedingung

$$(3\text{-}96) \qquad \begin{pmatrix} D_t \\ d_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{t-1} \\ d_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} d_t$$

Dieses System wird vereinfacht geschrieben als[1]:

$$(3\text{-}95a) \qquad \min_{d_t} K_{GB} = \sum_{t=1}^{T} \left[\vec{D}_t' \, K \, \vec{D}_t - 2 \, \vec{D}_t' \, K \, \vec{D}_t^* \right]$$

$$(3\text{-}96a) \qquad \text{N.B.} \quad \vec{D}_t = \psi_0 \, \vec{D}_{t-1} + \psi_1 \, d_t$$

Das Modell ist also zunächst sehr ähnlich den vorangegangenen. Seine Besonderheit ist die Größe $\vec{D}_t^*$ im Kostenfunktional, das, wie gezeigt wurde, von der Zentralbankpolitik abhängt. Im nächsten Abschnitt wird gezeigt welche Rolle unterschiedliche Erwartungen über die Zentralbankpolitik für das Geschäftsbankenverhalten spielen.

3.4.3.) Unterschiedliche Erwartungen über die Zentralbankpolitik und ihre Auswirkungen auf das Geschäftsbankenverhalten.

Im Abschnitt 3.3.2.) wurde auf die weitgehenden Folgen einer Abhängigkeit der Nebenbedingung von einem Faktor, der weder in der Verfügungsgewalt noch in der Kenntnis der Entscheidungseinheit liegt, hingewiesen. Im Modell des vorangehenden Ab-

---

1) Auf den konstanten Faktor kann verzichtet werden, da er das Optimierungsproblem nicht verändert.

schnitts tritt diese Abhängigkeit von einer Größe, über die die Entscheidungseinheit, hier die Geschäftsbanken, keinen Einfluß und keine Kenntnisse hat, indirekter auf, nämlich im Kostenfunktional, genauer im Zielwert $\vec{D}_t^*$.

Das Problem des ungewissen $\vec{D}_t^*$ kann auf verschiedene Arten angegangen werden. Wir verwenden einen einfachen deterministischen Ansatz: Es wird ein bestimmtes Z_t und damit ein bestimmtes $\vec{D}_t^*$ von den Geschäftsbanken erwartet[1]. Darauf werden sie ihre Politik einstellen. Interessant wird nun sein, welche Auswirkungen die verschiedenen Erwartungen auf die Geschäftsbankenpolitik haben. Insbesondere ergibt sich folgendes Problem: Angenommen es herrsche bis zum Zeitpunkt t = 0 eine konstante Zentralbankpolitik, so daß sich für die Geschäftsbanken der Zielwert $\vec{D}_o^* = \begin{pmatrix} D_o \\ 0 \end{pmatrix}$ ergibt. In Periode t = 1 wird nun von der Zentralbank eine Politik $Z_1 \neq Z_o$ betrieben, so daß sich ein neuer Zielwert $\vec{D}_1^*$ einstellt. Diese Veränderung der Zentralbankpolitik kann von den Geschäftsbanken auf zweierlei Arten gedeutet werden:

a) als eine langfristige Veränderung der Zentralbankpolitik.

b) als eine kurzfristige Veränderung der Zentralbankpolitik, d.h. als eine Politik, die im Rahmen der Konjunkturpolitik zu sehen ist.

Diese zwei unterschiedlichen Hypothesen können durch zwei extreme Fälle gekennzeichnet werden:

---

1) Statt in einem deterministischen Modell kann die Fragestellung in einem stochastischen Modell diskutiert werden. Vgl. dazu Abschnitt 3.6.2.).

a) Die Veränderung in Periode t = 1 wird als einmalig angesehen: $\vec{D}^*_o = \vec{D}_o$, $\vec{D}^*_1$, $\vec{D}^*_2 = \vec{D}^*_3 = \ldots = \vec{D}^*_o = \vec{D}_o$

b) Die Veränderung in Periode t = 1 wird als permanent angesehen: $\vec{D}^*_o = \vec{D}_o$, $\vec{D}^*_1 = \vec{D}^*_2 = \vec{D}^*_3 = \ldots \neq \vec{D}^*_o$

Für die Behandlung des Problems ist weiterhin der Planungshorizont der Geschäftsbanken von Bedeutung. Auch hier sollen zwei extreme Positionen verglichen werden

1) Planungshorizont T = 2

2) Planungshorizont T = ∞

Planungshorizont und Erwartungsbildung kann die Zentralbank beeinflussen, wenn nicht gar bestimmen. Bevor wir jedoch darauf eingehen,sollen erst die unterschiedlichen Politiken betrachtet werden. Dabei beachten wir lediglich die Auswirkungen in Periode t = 1.

Der Fall mit einem Planungshorizont von 2 Perioden (T = 2)

Im Falle von T = 2 sollen jetzt also die Auswirkungen unterschiedlicher Erwartungen für die Zentralbankpolitik in der Periode t = 1 = T-1 untersucht werden.

Für Periode T = 2 gilt[1]:

---

1) Vgl. dazu die Herleitung in Abschnitt 3.3.2.). Dabei fehlen die $\xi_2\, d_t$ und ξ_3 entsprechenden Größen in der Nebenbedingung und die Größe $\vec{Y}^*_t$' K $\vec{Y}^*_t$ im Kostenfunktional. Vgl. S. 77 ff.

$$V_T = \vec{D}'_{T-1}(\psi_o + \psi_1 \Phi_{1,T})' K(\psi_o + \psi_1 \Phi_{1,T}) \vec{D}_{T-1}$$

$$+ (\psi_1 \Phi_{2,T})' K(\psi_1 \Phi_{2,T})$$

$$- 2 \vec{D}'_{T-1}(\psi_o + \psi_1 \Phi_{1,T})' K \vec{D}^*_T$$

$$- 2 (\psi_1 \Phi_{2,T})' K \vec{D}^*_T$$

In der zu untersuchenden Periode T-1 ist dann die folgende Aufgabe zu lösen:

$$\min_{d_{T-1}} \; (\psi_o \vec{D}_{T-2} + \psi_1 d_{T-1})' \left[K + (\psi_o + \psi_1 \Phi_{1,T})' K(\psi_o + \psi_1 \Phi_{1,T})\right]$$

$$(\psi_o \vec{D}_{T-2} + \psi_1 d_{T-1})$$

$$- 2(\psi_o \vec{D}_{T-2} + \psi_1 d_{T-1})' \left[K \vec{D}^*_{T-1} + (\psi_o + \psi_1 \Phi_{1,T})' K \vec{D}^*_T\right]$$

$$+ (\psi_1 \Phi_{2,T})' K(\psi_1 \Phi_{2,T}) - 2(\psi_1 \Phi_{2,T})' K \vec{D}^*_T$$

Damit ergibt sich als optimale Politik in Periode T-1 [1]:

$$(3\text{-}97)\quad \hat{d}_{T-1,2} = -\{\psi'_1 \left[K + (\psi_o + \psi_1 \Phi_{1,T})' K(\psi_o + \psi_1 \Phi_{1,T})\right] \psi_1\}^{-1}$$

$$\{\psi'_1 \left[K + (\psi_o + \psi_1 \Phi_{1,T})' K(\psi_o + \psi_1 \Phi_{1,T})\right] \psi_o \vec{D}_{T-2}$$

$$- \psi'_1 \left[K \vec{D}^*_{T-1} + (\psi_o + \psi_1 \Phi_{1,T})' K \vec{D}^*_T\right]\}$$

unabhängig von D^*_T

---

1) Der Index 2 bei $d_{T-1,2}$ gibt den Planungshorizont an.

Unter Beachtung von T-1 = 1, und des Symbols S_t aus Abschnitt 3.3.2.) ergibt sich aus (3-97):

$$(3\text{-}98)\quad \hat{d}_{1,2} = -\{\psi_1' (K+S_2) \psi_1\}^{-1} \psi_1' \{K(\psi_o \vec{D}_o - \vec{D}_1^*) + (\psi_o + \psi_1 \Phi_{1,2})'K [(\psi_o + \psi_1 \Phi_{1,2})\psi_o \vec{D}_o - \vec{D}_2^*]\}$$

Dieser Ausdruck ist recht aufschlußreich. An ihm ist der langfristige Charakter der optimalen Politik ersichtlich: Wenn $\vec{D}_1 = \psi_o \vec{D}_o = \vec{D}_1^*$, d.h. wenn in Periode 1 das Ziel $\vec{D}_1^*$ ohne aktive Politik erreicht werden könnte, so ist die optimale Politik $\hat{d}_1$ doch nicht null, so lange

$$(\psi_o + \psi_1 \Phi_{1,2})\psi_o \vec{D}_o - \vec{D}_2^* \neq 0$$

Es wird hier deutlich, daß sich eine Anpassungspolitik, abgeleitet aus einer Optimierungsüberlegung, unterscheidet von einer Anpassungshypothese, die ad-hoc aufgestellt wird, etwa der Art:

$$d_t = (1-\lambda)(\vec{D}_t^* - \vec{D}_{t-1})$$

Hier spielt nur die im Augenblick auftretende Differenz $\vec{D}_t^* - \vec{D}_{t-1}$ eine Rolle. Wenn diese Differenz gleich null ist, dann wird keine Politik betrieben. Zukünftige Vorstellungen spielen hier also im Gegensatz zur Herleitung aus Optimalitätsüberlegungen keine Rolle.

Es sei hier noch einmal darauf hingewiesen, daß $\vec{D}_t^*$ eine Funktion der Zentralbankpolitik in Periode t ist. Da die heutige Geschäftsbankenpolitik von zukünftigen $\vec{D}_t^*$- Werten abhängt (hier speziell von $\vec{D}_t^*$ der nächsten Periode), ist sie auch von der zukünftig erwarteten Zentralbankpolitik abhängig.

Nach diesen Zwischenbemerkungen kommen wir wieder auf unser eigentliches Problem der unterschiedlichen Erwartungen zurück. Im Falle der Annahme, daß die Änderungen kurzfristiger

Natur sind, gilt (vgl. a) von S. 90), daß[1] $\vec{D}_1^* = \begin{pmatrix} D_1^* \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{D}_2^* = \vec{D}_o = \begin{pmatrix} D_o \\ 0 \end{pmatrix}$. Unter Beachtung der Definitionen von ψ_o, ψ_1, K von Seite 88 und der Definition von $\Phi_{2,T}$ wie es auf S. 90 verwendet wurde, gilt in diesem Fall:

$$(3\text{-}99)\quad \hat{d}^a_{1,2} = -\{\psi_1'(K+S_2)\psi_1\}^{-1}\psi_1 \{K(\psi_o\vec{D}_o - \vec{D}_1^*) + (\psi_o+\psi_1\Phi_{1,2})'K \cdot \begin{pmatrix} -\frac{k_1}{k_1+k_2} D_o \\ -\frac{k_1}{k_1+k_2} D_o \end{pmatrix}\}$$

Im Falle der Annahme, daß die Änderung langfristiger Natur ist, gilt (vgl. b) von S. 90), daß $\vec{D}_2^* = \begin{pmatrix} D_1^* \\ 0 \end{pmatrix}$. Unter der Beachtung der Definition der verwendeten Größen gilt hier:

$$(3\text{-}100)\quad \hat{d}^b_{1,2} = -\{\psi_1'(K+S_2)\psi_1\}^{-1}\psi_1\{K(\psi_o\vec{D}_o - \vec{D}_1^*) + (\psi_o+\psi_1\Phi_{1,2})'K \cdot \begin{pmatrix} -\frac{k_1}{k_1+k_2} D_o - (D_1^* - D_o) \\ -\frac{k_1}{k_1+k_2} D_o \end{pmatrix}\}$$

Die Differenz aus (3-99) und (3-100) ergibt:

$$(3\text{-}101)\quad \Delta_2\hat{d}_1 = \hat{d}^b_{1,2} - \hat{d}^a_{1,2} = \{\psi_1'(K+S_2)\psi_1\}^{-1}\psi_1 \{(\psi_o+\psi_1\Phi_{1,2})'K \begin{pmatrix} D_1^* - D_o \\ 0 \end{pmatrix}\}$$

(3-101) beschreibt die Differenz, die sich in der Politik der Periode 1 ergibt, hier in der Veränderung der Einlagen, wenn Zentralbankgeldmengenänderungen als einmalig oder als permanent, d.h. hier auch in Periode 2 weiterbestehend, angesehen werden. Betrachten wir etwa den Fall einer Zentralbankgeldmengenerhöhung. Damit steigt (vgl. S. 87) auch der Zielwert $\vec{D}_1^*$. Betrachten wir jetzt (3-101), dann ist klar, daß $\Delta d_1 > 0$. Das heißt bei der Annahme, daß die Änderung langfristiger Natur ist, wird die optimale Politik auf eine Änderung der Zentralbankgeldmenge in Periode 1 stärker reagieren als bei der Annahme, daß die Änderung kurzfristiger Natur ist. Wir kommen jetzt zu einem unendlichen Zeithorizont.

Der Fall mit einem unendlichen Planungshorizont $T = \infty$.

Aus den früheren Überlegungen ist klar, daß die zu einer Periode gehörende Politik unterschiedlich ist, wenn sich der Planungshorizont verändert. Wir werden also neben unterschiedlichen Erwartungen auch unterschiedliche Planungshorizonte zu berücksichtigen haben. Oben haben wir die Politik bei einem extrem kurzen Planungshorizont beachtet. Jetzt soll das entgegengesetzte Extrem mit einem Planungshorizont von Unendlich in unserem Modell untersucht werden. Auch hier wird unterschieden zwischen den zwei Erwartungen

a) Alle $\vec{D}_i^* = \vec{D}_o$ außer $\vec{D}_1^*$ (kurzfristiger Typ)

b) Alle $\vec{D}_i^* = \vec{D}_1^*$ außer $\vec{D}_o^* = \vec{D}_o$ (langfristiger Typ)

Unter der Annahme, daß S_t und damit auch $\Phi_{1,t}$ bei $T \to \infty$

gegen konstante Werte S und Φ_1 konvergieren[1], gilt für die optimale Politik[2] unter der Hypothese a)

$$(3\text{-}102)\quad \hat{d}^{a}_{1,\infty} = -\{\psi_1'(K+S)\psi_1\}^{-1}\psi_1'\{K(\psi_o\vec{D}_o-\vec{D}_1^*)+(\psi_o+\psi_1\Phi_1)'K$$
$$[(\psi_o+\psi_1\Phi_1)\psi_o\vec{D}_o-\vec{D}_o] + (\psi_o+\psi_1\Phi_1)'^2K$$
$$[(\psi_o+\psi_1\Phi_1)^2\psi_o\vec{D}_o-\vec{D}_o] + (\psi_o+\psi_1\Phi_1)'^3K$$
$$[(\psi_o+\psi_1\Phi_1)^3\psi_o\vec{D}_o-\vec{D}_o] + \ldots\}$$

Unter der Hypothese b) gilt dagegen:

$$(3\text{-}103)\quad \hat{d}^{b}_{1,\infty} = -\{\psi_1'(K+S)\psi_1\}^{-1}\psi_1'\{K(\psi_o\vec{D}_o-\vec{D}_1^*)$$
$$+(\psi_o+\psi_1\Phi_1)'K[(\psi_o+\psi_1\Phi_1)\psi_o\vec{D}_o-\vec{D}_1^*]$$
$$+(\psi_o+\psi_1\Phi_1)'^2K[(\psi_o+\psi_1\Phi_1)^2\psi_o\vec{D}_o-\vec{D}_1^*] + \ldots\}$$

Die Differenz aus (3-102) und (3-103) ergibt

$$(3\text{-}104)\quad \underset{\infty}{\Delta}\hat{d}_1 = \hat{d}^{b}_{1,\infty} - \hat{d}^{a}_{1,\infty} =$$
$$\{\psi_1'(K+S)\psi_1\}^{-1}\psi_1'\{(\psi_o+\psi_1\Phi_1)'+(\psi_o+\psi_1\Phi_1)'^2+\ldots\}K(\vec{D}_1^*-\vec{D}_o)$$
$$= \{\psi_1'(K+S)\psi_1\}^{-1}\psi_1'[I-(\psi_o+\psi_1\Phi_1)']^{-1}$$
$$[\psi_o+\psi_1\Phi_1]'K(\vec{D}_1^*-\vec{D}_o)$$

---

1) Für die Bedingungen vgl. Anhang IV. Diese sind in unserem Modell erfüllt.
2) Die Herleitung erfolgt in Anhang III.

Interessant ist nun der Unterschied zwischen $\underset{\infty}{\Delta}\hat{d}_1$ und $\underset{2}{\Delta}\hat{d}_1$. Unter der Verwendung unserer Größen aus (3-95) und (3-96) gilt:

$$(3\text{-}101a)\quad \underset{2}{\Delta}\hat{d}_1 = \frac{1}{h_{11,1}+K_2}\,(1,1)\begin{pmatrix} 1-\frac{k_1}{k_1+k_2} & , & -\frac{k_1}{k_1+k_2} \\ 0 & , & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D_1^*-D_o \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{h_{11,1}+K_2}\,k_1\left(1-\frac{k_1}{k_1+k_2}\right)(D_1^*-D_o)$$

mit[1)]

$$h_{11,1} = k_1 + k_1\left(1-\frac{k_1}{k_1+k_2}\right)^2 + \frac{k_1^2\,k_2}{(k_1+k_2)^2}$$

$$(3\text{-}105)\quad h_{11,1} = k_1 + k_1\left(\frac{k_2}{k_1+k_2}\right)^2 + k_1^2\,\frac{k_2}{(k_1+k_2)^2}$$

Für unendlichen Zeithorizont gilt:

$$(3\text{-}104a)\quad \underset{\infty}{\Delta}\hat{d}_1 = \frac{1}{h_{11}+k_2}\,(1,1)\begin{pmatrix} \frac{h_{11}}{h_{11}+k_2} & , & \frac{h_{11}}{h_{11}+k_2} \\ 0 & , & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 1-\frac{h_{11}}{h_{11}+k_2} & , & -\frac{h_{11}}{h_{11}+k_2} \\ 0 & , & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D_1^*-D_o \\ 0 \end{pmatrix}$$

---

1) $h_{11,1}$ ist das Element der ersten Spalte und der ersten Zeile der Matrix $H_1 = (K+S_2) = K + (\psi_o+\psi_1\Phi_{1,2})'K(\psi_o+\psi_1\Phi_{1,2})$. Die Glieder $h_{12,1}$ und $h_{21,1}$ sind in unserem Falle null, während $h_{22,1}$ gleich k_2 ist.

$$= \frac{1}{h_{11} + k_2} (1,1) \quad \frac{h_{11}+ k_2}{h_{11}} \quad \begin{pmatrix} 1 & , & -\frac{h_{11}}{h_{11} + k_2} \\ 0 & & \frac{h_{11}}{h_{11} + k_2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} K_1(1-\frac{h_{11}}{h_{11} + k_2}) & , & -\frac{h_{11}k_2}{h_{11} + k_2} \\ 0 & , & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1^*-D_o \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\infty}{\Delta} \hat{d}_1 = \frac{1}{h_{11}} k_1 (1- \frac{h_{11}}{h_{11}+k_2}) (D_1^*-D_o)$$

mit[1)]

$$(3\text{-}106) \quad h_{11} = k_1 + h_{11} \left(\frac{k_2}{h_{11}+k_2} \right)^2 + h_{11}^2 \frac{k_2}{(h_1+k_2)^2}$$

Der Vergleich zwischen (3-101a) und (3-104a) und zwischen $h_{11,1}$ und h_{11} zeigt, daß beide Größen eine große Ähnlichkeit miteinander aufweisen. Insbesondere wird ein Vergleich zwischen $h_{11,1}$ und h_{11} weiteren Aufschluß geben.

Es sei

$$(3\text{-}107) \qquad h' = \frac{hk_2^2 + h^2k_2}{(h + k_2)^2} \qquad \text{mit } h > 0$$

---

1) h_{11} ist das Element der ersten Spalte und der 1. Zeile der Matrix $H = (K+S) = K + (\psi_o+\psi_1\Phi_1)'K(\psi_o+\psi_1\Phi_1)$. $h_{22} = k_2$ und $h_{21}=h_{12}=0$.

Die Ableitung dieses Ausdrucks nach h ergibt:

$$(3\text{-}108) \qquad \frac{\partial h'}{\partial h} = \frac{k_2^2 h^2 + 2h k_2^3 + k_2^4}{(h + k_2)^4} > 0$$

Wegen (3-106) ist $h_{11} > k_1$. Ersetzt man aber in (3-105) K_1 durch h_{11}, so ist dies, wie man in (3-106) sieht gleich h_{11}. Da $h_{11} > k_1$ gilt unter Berücksichtigung von (3-107) und (3-108), daß

$$(3\text{-}109) \qquad h_{11} > k_1 + k_1\left(1 - \frac{k_1}{k_1+k_2}\right)^2 + \frac{k_1^2 k_2}{(k_1+k_2)^2} = h_{11,1}$$

Nun zurück zum Vergleich zwischen (3-101a) und (3-104a). Da $h_{11} > k_1$, gilt:

$$k_1\left(1 - \frac{k_1}{k_1+k_2}\right)(D_1^* - D_o) > k_1\left(1 - \frac{h_{11}}{h_{11}+k_2}\right)(D_1^* - D_o)$$

Es ist jetzt nur noch zu zeigen, daß $h_{11} \geq h_{11,1} + k_2$. In (3-109) wurde gezeigt, daß $h_{11,1} < h_{11}$. Damit gibt es Größen von $k_2 > 0$, bei denen die obige Forderung erfüllt ist. Da für die optimale Politik nicht die einzelnen Größen k_1 und k_2 für sich genommen wesentlich sind, sondern das Verhältnis $\frac{k_1}{k_2}$ kann k_2 unter der Bedingung $k_2 > 0$ beliebig gewählt werden, also auch so, daß die Forderung $h_{11} \geq h_{11,1} + k_2$ erfüllt ist[1]. Damit ist gezeigt, daß in unserem Fall gilt:

---

1) Die Differenz $h_{11} - h_{11,1} > 0$ ist für alle $k_1, k_2 > 0$ erfüllt. Die Differenz nimmt jedoch mit steigendem K_2 zu. In der Regel wird bei unserem Beispiel $k_1 > k_2$ sein, d.h. die Kosten der Anpassung geringer als die Kosten aus dem Gleichgewicht zu sein.

(3-110) $\Delta_{\infty} \hat{d}_1 < \Delta_2 \hat{d}_1$

Das heißt die Differenz zwischen den Strategien bei kurzfristiger und langfristiger Erwartung über die Zentralbankpolitik ist bei einem großen Planungshorizont geringer als bei einem kleinen Planungshorizont.

Ergebnisse dieses Abschnitts sollen jetzt im folgenden Abschnitt kommentiert und interpretiert werden.

3.4.4.) Die Bedeutung der unterschiedlichen Erwartungen für Geschäftsbanken und Zentralbank.

Die Ergebnisse des Abschnitts 3.4.3.) geben die optimale Politik der Geschäftsbanken unter alternativen Hypothesen über die zukünftige Zentralbankpolitik und mit verschieden langen Planungshorizonten an. Wir haben zu unterscheiden zwischen:

$\hat{d}^a_{1,2}$: Einlageveränderung in Periode 1 unter der Annahme kurzfristiger Zentralbankpolitik bei einem Planungshorizont von zwei Perioden.

$\hat{d}^b_{1,2}$: Einlageveränderung in Periode 1 unter der Annahme langfristiger Zentralbankpolitik bei einem Planungshorizont von zwei Perioden.

$\hat{d}^a_{1,\infty}$: Einlageveränderung in Periode 1 unter der Annahme kurzfristiger Zentralbankpolitik bei einem Planungshorizont von unendlich vielen Perioden.

$\hat{d}^b_{1,\infty}$: Einlageveränderung in Periode 1 unter der Annahme langfristiger Zentralbankpolitik bei einem Planungshorizont von unendlich vielen Perioden.

Je nach Fragestellung interessiert der Vergleich zwischen $\hat{d}^a_{1,2}$ bzw. $\hat{d}^a_{1,\infty}$ und $\hat{d}^b_{1,2}$ bzw. $\hat{d}^b_{1,\infty}$ und zwischen $(\hat{d}^b_{1,2}-\hat{d}^a_{1,2})$ und $(\hat{d}^b_{1,\infty}-\hat{d}^a_{1,\infty})$[1].

1) Aus (3-101) bzw. (3-101a) (bei T = 2) und (3-104) bzw. (3-104a) (bei T = ∞) folgt: Eine expansive Zentralbankpolitik in Periode 1 bewirkt eine stärkere Ausdehnung der Einlagen in der ersten Periode, wenn sie als langfristig angesehen wird, eine schwächere Ausdehnung der Einlagen in der ersten Periode, wenn sie als kurzfristig angesehen wird. Das analoge gilt bei einer kontraktiven Zentralbankpolitik.

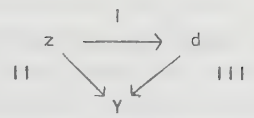
2) Aus (3-110) folgt: Unterschiedliche Erwartungen über den Charakter der zukünftigen Zentralbankpolitik wirken sich bei kurzem Planungshorizont stärker aus als bei langem Planungshorizont.

Außer für die Geschäftsbanken sind die Aussagen besonders für die Zentralbank von Bedeutung, wie in Abschnitt 3.4.1.) erläutert wurde.

Unter der Annahme der Gültigkeit von (3-76) und dem Verhalten der Geschäftsbanken, wie es in 3.4.1.) und 3.4.2.) beschrieben wurde, kann das allgemeine Wirkungsschema der Zentralbankpolitik folgendermaßen gezeichnet werden:

---

1) Die Fragestellung ob Politiken bei langem oder kurzem Zeithorizont stärker wirken wurde im Anhang III dahingehend beantwortet, daß bei längerem Planungshorizont die Politik in einer Periode schwächer ist als bei kurzem Planungshorizont.



wobei I für den in den vorangehenden Abschnitten dargestellten Zusammenhang steht und II und III für die Einflüsse, wie sie in (3-76) angenommen werden. Im Falle einer Erwartungsbildung der Geschäftsbanken, wonach eine Zentralbankgeldmengenänderung nur kurzfristigen Charakter hat, ist der Einfluß I nach 1) schwächer als bei der Erwartung eines langfristigen Charkters der Zentralbankgeldmengenänderung und damit natürlich auch der Einfluß von III. Ein verhältnismäßig schwacher Einfluß von z auf d und damit von d auf Y kann je nach Situation erwünscht oder unerwünscht sein. Nehmen wir den Fall einer kurzfristigen Konjunkturpolitik, die mit Hilfe der Zentralbankgeldänderung betrieben werden soll, an. Der Koeffizient ξ_1 der direkten Zentralbankpolitik auf Y ist vorgegeben. Würde dies der einzige Einfluß sein, der von z auf Y ausgeht, dann müßte z sehr groß gewählt werden um das vorgegebene Ziel Y^* zu realisieren, mit der Folge, daß die Kosten des Instrumenteneinsatzes groß werden. Wirkt dagegen z auch über d, dann kann z niedriger als vorher gewählt werden, unter der Voraussetzung allerdings, daß die Wirkungskette I, III die gleiche Richtung hat wie die Wirkung II[1)]. In dieser Situation ist es offensichtlich nach 1) für die Zentralbank vorteilhaft, wenn die Geschäftsbanken die kurzfristige Zentralbankpolitik als langfristig ansehen.

---

1) Diese Annahme ist für unser hier verwendetes Modell dank der Annahme $(\alpha_{11} - (1-\varepsilon)\alpha_{13}) > 0$ erfüllt, da dann z.B. eine Ausweitung der Zentralbankgeldmenge auch die Geschäftsbanken veranlasst die Einlagen auszuweiten, was wie z positiv auf Y wirkt. Wenn die Bedingung gleicher Richtung der zwei Impulse nicht erfüllt ist, ergeben sich andere Folgerungen.

Anders ist die Situation gelagert, wenn die Zentralbank wegen anderen Zielvariablen (etwa dem außenwirtschaftlichen Gleichgewicht) kurzfristig von einem z abweicht, das zusammen mit d die Zielgröße Y *erreicht hätte. Wird der kurzfristige Charakter dieser Zentralbankgeldmengenänderung von den Geschäftsbanken nicht erkannt, dann wird die Abweichung von der Ideallinie durch die Reaktion der Geschäftsbanken noch verstärkt. Es ist hier aus der Sicht der Zentralbank wünschenswert, daß der kurzfristige Charakter der Zentralbankgeldänderungen erkannt wird,und damit neben der unerwünschten Wirkung II nicht auch noch die Kette I, III verstärkt wirksam wird. Möglicherweise ist dies eine Erklärung dafür, daß Zentralbanken gewisse Korrekturen nur sehr zögernd vornehmen, und diese Korrekturen auch sehr ausführlich begründen.

Aus diesen zwei angeführten Beispielen ergibt sich schon ein Dilemma der Zentralbank, das später zu behandeln sein wird. Im ersten Beispiel war der Zentralbank daran gelegen, daß die Geschäftsbanken die Kurzfristigkeit ihrer Politik nicht erkennen, während im zweiten Fall ihr gerade am Erkennen gelegen war.

Situationen in denen es von der Zentralbank erwünscht ist, daß ihre langfristige Politik als solche erkannt wird, sind die Regel in Fällen, wo die Zentralbank an einer Verstetigung des Bankenverhaltens interessiert ist. Dies wird vor allem bei Situationen nahe den Zielgrößen der Fall sein. Weiter kann dies erwünscht sein unter dem Gesichtspunkt der Vorausschätzbarkeit des Bankenverhaltens, wie unten klar wird.

Situationen in denen eine langfristige Zentralbankpolitik

besser als kurzfristig gesehen wird, sind gegeben, wenn die Geschäftsbanken Interesse daran haben und auch die Möglichkeit dazu haben, die Zentralbankpolitik zu unterlaufen, dies jedoch aus Kostengründen nur lohnt, wenn die unerwünschte Zentralbankpolitik tatsächlich langfristig ist. Dies tritt insbesondere bei direkten Interessengegensätzen auf, wie sie in unserem Modell allerdings nicht vorkommen.

Welche Bedeutung hat jetzt die Aussage 2) von oben? Wie erwähnt, kann das Geschäftsbankenverhalten, wie es hier unterstellt wurde, als Reaktionsfunktion der Geschäftsbanken auf die Zentralbankpolitik gelesen werden. Diese zu kennen ist nach Abschnitt 3.3.2.) von zentraler Bedeutung für die Zentralbank. Diese kann nun nicht sicher sein, welche Art der Erwartungen die Geschäftsbanken über die Zentralbankgeldmengenänderung hegen. Die Hypothesen a)und b) geben die zwei möglichen Extremfälle an, zwischen denen die tatsächlichen Erwartungen liegen müssen. Die Differenzen $\underset{\infty}{\Delta}\hat{d}_1$ und $\underset{2}{\Delta}\hat{d}_1$ bilden die zwei Korridore für die Reaktionen der Geschäftsbanken. Nehmen wir an, daß der Zentralbank sonst keine Informationen vorliegen, so daß Gleichverteilung in jedem dieser Korridore angenommen werden muß[1]. Je schmäler diese beiden Korridore sind, desto enger kann die Zentralbank die Wirkung ihrer Politik eingrenzen. Nach Aussage 2) hängt das aber vom Planungshorizont ab:

---

1) In unserem Falle haben wir in der Zwei-Perioden-Planung nur die Punktverteilung für z_2 mit den Ausprägungen (z_o, z_1) zugelassen. Eine allgemeinere Gleichverteilung tritt natürlich auf, wenn z_2 jeden Wert zwischen z_o und z_1 annehmen kann. Wie leicht einsichtig, liegen die daraus folgenden Reaktionen zwischen den von uns angegebenen Grenzen. Im Falle $T = \infty$ wurde nur die Punktverteilung $z_2, z_3, \ldots = z_1$ und $z_2, z_3, \ldots = z_o$ zugelassen. Hier kann natürlich ebenfalls eine größere Variation angenommen werden, wobei für jedes z_i, $i = 2\ldots$, eine Gleichverteilung zwischen z_o und z_1 angenommen werden kann. Die Reaktionen liegen zwischen den von uns angegebenen Grenzen. Für die von uns angegebenen Folgerungen ist allerdings erforderlich, daß die Breite in der die z_i schwanken können im Falle mit einem großen Planungshorizont nicht größer sein darf als im Falle eines kurzen Planungshorizontes.

Bei einem Planungshorizont von unendlich vielen Perioden kann der Möglichkeitsbereich einer Reaktion auf die Zentralbankpolitik enger eingegrenzt werden als bei einem Planungshorizont von zwei Perioden. Das ist ein Anreiz für die Zentralbank, den Geschäftsbanken, soweit es in ihrer Macht steht, einen weiten Planungshorizont zu ermöglichen. Dieser wird neben anderem sicher davon abhängen, wie gewiß die zukünftige Zentralbankpolitik von den Geschäftsbanken vorausgeplant werden kann, d.h. daß es von hier gesehen im Interesse der Zentralbank liegt, ihre langfristige Strategie darzulegen.

Kann die Information der Zentralbank dahingehend ausgeweitet werden, daß die Annahme der Gleichverteilung in den einzelnen Korridoren überwunden wird? Die Gleichverteilung ist Ausdruck dafür, daß es aus der Sicht der Zentralbank für die Geschäftsbanken nicht plausibel ist, die eine oder andere Hypothese über Variationen der Zentralbankpolitik zu bevorzugen. Mit anderen Worten,die Zentralbank hat den Geschäftsbanken keinen Anlaß gegeben, die eine oder andere Hypothese als wahrscheinlicher anzunehmen. Bei der Bekanntgabe einer langfristigen Strategie, in die die Geschäftsbanken, etwa durch ihre Bestätigung in der Vergangenheit, Vertrauen setzen, wird die Annahme der Gleichverteilung nicht mehr adäquat sein. Im Extremfall des vollständigen Vertrauens ist sie durch eine sichere Erwartung zu ersetzen. Längerfristiger Planungshorizont und sichere Erwartungen sind beides Folgen einer Offenlegung der Zentralbankpolitik. Unerwünscht ist eine solche Politik dagegen, wie gesehen, vom Gesichtswinkel eines schnellen Wirkens von kurzfristiger Konjunkturpolitik. Dort dürfte das Problem

jedoch darin bestehen, daß die Vortäuschung eines langfristigen Charakters einer kurzfristigen Politik nicht beliebig oft wiederholt werden kann. Ist das Vertrauen in die Ankündigungen der Zentralbank verloren, ist sowohl die "Klinge" der kurzfristigen Geldmengenänderung "stumpf" geworden, als auch die Beurteilung der Erwartungsbildung der Geschäftsbanken durch die Zentralbank um vieles schwieriger geworden. Je mißtrauischer und kritischer die Geschäftsbanken die Zentralbankpolitik beobachten, desto weniger ist eine kurzfristige Konjunkturpolitik mit Hilfe der Geldmengensteuerung angebracht. Die Problematik wird später im Zusammenhang mit der rationalen Erwartungshypothese noch einmal aufzugreifen sein.

3.5.) Geldpolitik bei Verzögerungen

3.5.1.) Die Beschreibung des Problems

Die Möglichkeit der verzögerten Wirkungsweise der Zentralbankpolitik ist bekannt. Sowohl in den Modellen des dynamischen Geldschöpfungsmultiplikators, als auch in den Modellen mit autonomen Geschäftsbanken, können derartige Verzögerungen auftreten. Im Falle des dynamischen Geldschöpfungsmultiplikators ohne erwünschte Überschußreserven bedarf es dazu einer geeigneten Annahme für $\tilde{\mu}(L)$ oder einer Verzögerung der Zinsabhängigkeit der Investitionen[1]. Dieses letzte Argument gilt auch im Falle des dynamischen

---

1) In den Beziehungen des Abschnitts 3.2.1.) ist die Wirkung der Zentralbankgeldsteuerung schon um eine Periode verzögert, d.h. $h = 1$.

Geldschöpfungsmultiplikators mit erwünschten Überschußreserven und für das Modell mit autonomen Geschäftsbanken. Die Beziehungen lauten dann:

$$(3\text{-}26b) \qquad Y_t = \zeta_0 + \zeta_1 Y_{t-1} + \zeta_2 Z_{t-h}$$

bzw.

$$(3\text{-}76a) \qquad \vec{Y}_t = \xi_0 \vec{Y}_{t-1} + \xi_1 z_{t-h} + \xi_2 d_{t-h} + \xi_3$$

Eine andere Quelle möglicher Verzögerungen ist der Lag zwischen Entscheidung und Handlung[1]. Wenn dieser Lag etwa h Perioden dauert, dann muß schon in Periode t-h die Entscheidung für Periode t getroffen werden[2]. Eine entsprechende Beziehung wäre[3]:

$$(3\text{-}76b) \qquad \vec{Y}_t = \xi_0 \vec{Y}_{t-1} + \xi_1 z_{t-h} + \xi_2 d_t + \xi_3$$

Es wird im folgenden Abschnitt zu untersuchen sein, inwieweit solche Verzögerungen die optimale Politik im Vergleich zu Problemen ohne verzögerte Wirkung erschweren.

---

1) Dieser Lag ist etwa wie bei den Lags in Jorgensons Investitionstheorie zu sehen. Vgl. Jorgenson (1965). Dort wird allerdings statt eines Lags eine ganze Verzögerungsverteilung angenommen, was in unserem Falle eine unnötige Verkomplizierung darstellte.

2) Das ist ein Problem, das wohl bei Staatsausgaben eine größere Rolle spielt als bei Zentralbankpolitik.

3) Natürlich können solche Verzögerungen auch bei den Geschäftsbanken auftreten. Für eine Zentralbankpolitik spielt dies jedoch keine Rolle, wenn d_t erst in Periode t auftritt und dann erst auch von der Zentralbank beobachtet werden kann.

3.5.2.) Die optimale Zentralbankpolitik bei verzögerten Wirkungen[1].

Bei der Herleitung der optimalen Zentralbankpolitik wird der Begriff der offenen Politik (open-loop-policy) verwendet, der im Gegensatz zur bisher verwendeten geschlossenen Lösung (feedback-policy) steht. Die offene Lösung soll zunächst am Modell ohne Verzögerungen erläutert werden:

Für unser Problem aus (3-77) und (3-76) ergab sich die optimale Lösung:

$$(3\text{-}81)\qquad \hat{z}_t = -(\xi_1'(K+S_{t+1})\xi_1)^{-1}\,\xi_1'(K+S_{t+1})\,\xi_o\,\vec{Y}_{t-1} - (\xi_1'(K+S_{t+1})\xi_1)^{-1}\,\xi_1'(K+S_{t+1})\,\xi_2\,d_t - (\xi_1'(K+S_{t+1})\xi_1)^{-1}\,\xi_1'((K+S_{t+1})\,\xi_3 - (K\,\vec{Y}^{*}_{t} + s_{t+1}))$$

$$(3\text{-}82a)\qquad \hat{z}_t = \Phi_{1,t}\,\vec{Y}_{t-1} + \Phi_{3,t}\,d_t + \Phi_{4,t}$$

Für die optimale Politik in t-1 gilt:

$$\hat{z}_{t-1} = \Phi_{1,t-1}\,\vec{Y}_{t-2} + \Phi_{3,t-1}\,d_{t-1} + \Phi_{4,t-1}$$

Zusammen mit (3-76) in Periode t-1 gilt für $\vec{Y}_{t-1}$ bei optimalem z_{t-1}:

---

1) Eine andere Behandlung des Problems findet sich bei R. Pindyck (1972), S. 397 f. Pindyck leitet dort insbesondere closed-loop-Steuerungen ab.

(3-111) $$\vec{Y}_{t-1} = (\xi_o + \xi_1 \Phi_{1,t-1}) Y_{t-2}$$

$$+ (\xi_1 \Phi_{3,t-1} + \xi_2) d_{t-1} + \xi_1 \Phi_{4,t-1} + \xi_3$$

$$= M_{1,t-1} \vec{Y}_{t-2} + M_{2,t-1} d_{t-1} + M_{3,t-1}$$

Für die optimale Politik in t-2 gilt:

$$\hat{z}_{t-2} = \Phi_{1,t-2} \vec{Y}_{t-3} + \Phi_{3,t-2} d_{t-2} + \Phi_{4,t-2}$$

Zusammen mit (3-76) in Periode t-2 gilt für $\vec{Y}_{t-2}$ bei optimalem z_{t-2}:

(3-112) $$\vec{Y}_{t-2} = M_{1,t-2} \vec{Y}_{t-3} + M_{2,t-2} d_{t-2} + M_{3,t-2}$$

(3-112) in (3-111) ergibt $\vec{Y}_{t-1}$ bei optimaler Politik in t-1 und t-2:

$$\vec{Y}_{t-1} = M_{1,t-1}(M_{1,t-2} \vec{Y}_{t-3} + M_{2,t-2} d_{t-2} + M_{3,t-2})$$

$$+ M_{2,t-1} d_{t-1} + M_{3,t-1}$$

$$= M_{1,t-1} M_{1,t-2} \vec{Y}_{t-3} + M_{1,t-1} M_{2,t-2} d_{t-2}$$

$$+ M_{2,t-1} d_{t-1} + M_{1,t-1} M_{3,t-2} + M_{3,t-1}$$

Verfährt man weiter so, dann ergibt sich $\hat{\vec{Y}}_{t-1}$, wobei immer eine

optimale Politik angewandt wurde, als:

$$(3\text{-}113)\qquad \hat{\vec{Y}}_{t-1} = \Big(\prod_{i=1}^{t-1} M_{1,i}\Big)\,\vec{Y}_o + \sum_{i=1}^{t-1}\Big(\prod_{j=i+1}^{t-1} M_{1,j}\Big)\,M_{2,i}\,d_i + \sum_{i=1}^{t-1}\Big(\prod_{j=i+1}^{t-1} M_{1,j}\Big)\,M_{3,i}$$

(3-113) in (3-82a) eingesetzt ergibt

$$\hat{z}_t = \Phi_{1,t}\Big\{\Big(\prod_{i=1}^{t-1} M_{1,i}\Big)\,\vec{Y}_o + \sum_{i=1}^{t-1}\Big(\prod_{j=i+1}^{t-1} M_{1,j}\Big)\,M_{2,i}\,d_i + \sum_{i=1}^{t-1}\Big(\prod_{j=i+1}^{t-1} M_{1,j}\Big)\,M_{3,i}\Big\} + \Phi_{3,t}\,d_t + \Phi_{4,t}$$

$$(3\text{-}114)\qquad \hat{z}_t = M^*_{1,t}\,\vec{Y}_o + \sum_{i=1}^{t} M^*_{2,i}\,d_i + M^*_{3,t}$$

(3-114) stellt die offene Lösung dar: Die optimale Politik in Periode t hängt damit von $\vec{Y}_o$ sämtlichen Größen von d_t der Vergangenheit und Gegenwart und den Parametern des Systems ab[1].

Kommen wir nun zum Fall der Beziehung (3-76b): Die Veränderung der Zentralbankgeldmenge beeinflußt das Volkseinkommen erst nach h Perioden, die Veränderung der Einlagen beeinflußt dagegen das Volkseinkommen schon in der gleichen Periode[2].

---

1) Abhängigkeit von den Parametern bedeutet unter anderem auch die Abhängigkeit von S_t. Das hat,wie in 3.3.2.) beschrieben, zur Folge, daß auch zukünftige Einlageveränderungen auf $\hat{z}_t$ Einfluß haben.

2) Der Fall, in dem z und d erst nach h Perioden wirksam werden, ist analog zu behandeln.

Die optimale Politik $\hat{z}_1 \ldots \hat{z}_{T-h}$ ist zu bestimmen. Als optimale Politik in t-h ergibt sich:

$$\hat{z}_{t-h} = \Phi_{1,t} \vec{Y}_{t-1} + \Phi_{3,t} d_t + \Phi_{4,t}$$

Beginnen wir in Periode 1 mit der optimalen Politik, dann wird als erstes $\vec{Y}_{h+1}$ beeinflußt. Die Politik in Periode t beeinflußt $\vec{Y}_{t+h}$:

$$\hat{z}_t = \Phi_{1,t+h} \vec{Y}_{t+h-1} + \Phi_{3,t+h} d_{t+h} + \Phi_{4,t+h} \tag{3-115}$$

Damit gilt für $\vec{Y}_{t+h}$ bei optimaler Politik in t:

$$\vec{Y}_{t+h} = (\xi_o + \xi_1 \Phi_{1,t+h}) \vec{Y}_{t+h-1} + (\xi_1 \Phi_{3,t+h} + \xi_2) d_{t+h} + \xi_1 \Phi_{4,t+h} + \xi_3 \tag{3-116}$$

$\vec{Y}_h$ ist von der steuernden Instanz als Datum zu akzeptieren. Analog zu (3-113) muß (3-116) damit nach $\vec{Y}_h$ entwickelt werden: So ergibt sich etwa bei optimaler Politik in t-1 und t-2 für $\vec{Y}_{t+h-1}$:

$$\vec{Y}_{t+h-1} = M_{1,t+h-1} M_{1,t+h-2} \vec{Y}_{t+h-3} + M_{1,t+h-1} M_{2,t+h-2} \cdot d_{t+h-2} + M_{2,t+h-1} d_{t+h-1} + M_{1,t+h-1} M_{3,t+h-2} + M_{3,t+h-1}$$

Verfährt man weiter so, dann ergibt sich $\vec{Y}_{t+h-1}$, wobei von

t=1 bis t-h eine optimale Politik verwandt wurde:

$$(3\text{-}117)\qquad \hat{\vec{Y}}_{t+h-1} = \Big(\prod_{i=1}^{t-1} M_{1,i+h}\Big)\,\vec{Y}_h + \sum_{i=1}^{t-1}\Big(\prod_{j=i+1}^{t-1} M_{1,j+h}\Big)\,M_{2,i+h} \cdot d_{i+h} + \sum_{i=1}^{t-1}\Big(\prod_{j=i+1}^{t-1} M_{1,j+h}\Big)\,M_{3,i+h}$$

(3-117) in (3-115) eingesetzt ergibt:

$$(3\text{-}118)\qquad \hat{z}_t = \Phi_{1,t+h}\Big\{\Big(\prod_{i=1}^{t-1} M_{1,i+h}\Big)\,\vec{Y}_h + \sum_{i=1}^{t-1}\Big(\prod_{j=i+1}^{t-1} M_{1,j+h}\Big)\,M_{2,i+h} \cdot d_{i+h} + \sum_{i=1}^{t-1}\Big(\prod_{j=i+1}^{t-1} M_{1,j+h}\Big)\,M_{3,i+h}\Big\} + \Phi_{3,t+h}\,d_{t+h} + \Phi_{4,t+h}$$

$$= M^*_{1,t+h}\,\vec{Y}_h + \sum_{i=1}^{t} M^*_{2,i+h}\,d_{i+h} + M^*_{3,t}$$

Für $t \geq h$ ist damit die Aufgabe gelöst, unter der Annahme, daß $\vec{Y}_h$ in t=h beobachtet werden kann. Nicht so für $0 \leq t < h$. Für diesen Fall muß $\vec{Y}_h$ noch geschätzt, bzw. errechnet werden, unter Kenntnis von $\vec{Y}_o$ und $d_1 \ldots d_h$.

Es gilt[1)]

$$\vec{Y}_h = \xi_o^h\,Y_o + \sum_{i=1}^{h}(\xi_o^{i-1}\,\xi_1\,z_{-i+1}) + \sum_{i=1}^{h}(\xi_o^{i-1}\,\xi_2\,d_{h-i+1}) + \sum_{i=1}^{h}(\xi_o^{i-1}\xi_3)$$

---

1) Statt bis auf $\vec{Y}_o$ zurückzugehen kann natürlich auch auf jedes andere $\vec{Y}_t$ $0 < t < h$ zurückgegangen werden, insbesondere auf das $\vec{Y}_t$ das als letztes beobachtet werden konnte.

Damit gilt für $0 \leq t < h$:

$$(3\text{-}119) \qquad \hat{z}_t = M^*_{1,t+h} \Big\{ \xi_o^h \, Y_o + \sum_{i=1}^{h} (\xi_o^{i-1} \xi_1 z_{-i+1}) + \sum_{i=1}^{h} (\xi_o^{i-1} \xi_2 d_{h-i+1}) + \sum_{i=1}^{h} (\xi_o^{i-1} \xi_3) \Big\} + \sum_{i=1}^{t} M^*_{2,i+h} \, d_{i+h} + M^*_{3,t}$$

$$(3\text{-}120) \qquad \hat{z}_t = \hat{M}_{1,t} \, Y_o + \sum_{i=0}^{h+1} \hat{M}_{2,i} \, z_i + \sum_{i=1}^{h+t} \hat{M}_{3,i} \, d_i + \hat{M}_{4,t}$$

Zur Bestimmung von $\hat{z}_t$ müssen also vor allem die d's bis h Perioden in die Zukunft bekannt sein. Wie aber in Abschnitt 3.3.2.) gezeigt wurde, ist diese Kenntnis auch ohne Verzögerung in der Wirkungsweise erforderlich. Damit ist die Politik gegenüber einem Modell ohne Verzögerungen nicht wesentlich erschwert.

3.6.) Probleme stochastischer Ansätze.

3.6.1.) Das certainty-equivalence Prinzip

Im Abschnitt 2.5.) wurden Störglieder in das statische Modell eingeführt und begründet. Analoge Überlegungen führen auch in dynamischen Modellen zur Aufnahme von Störgliedern. Unsere Nebenbedingung lautet demgemäß statt (3-76)

$$(3\text{-}121) \qquad \vec{Y}_t = \xi_0 \vec{Y}_{t-1} + \xi_1 z_t + \xi_2 d_t + \xi_3 + \varepsilon_t$$

ε_t soll normalverteilt sein mit $E(\varepsilon_t) = 0$ und $E(\varepsilon_t \varepsilon_t') = var.$ Damit ist $\vec{Y}_t$ eine stochastische Größe. Statt (3-77) des deterministischen Falles wird jetzt:

$$(3\text{-}122) \qquad E_o\left\{\left(\sum_{t=1}^{T} (\vec{Y}_t - \vec{Y}_t^*)' K (\vec{Y}_t - \vec{Y}_t^*)\right)\right\}$$

minimiert, mit E_o: Erwartungswert bei gegebenem $\vec{Y}_o$ [1)2)].
Für den Zeitpunkt t gilt:

$$(3\text{-}123) \qquad V(\vec{Y}_{t-1}) = \min_{z_t} E_{t-1}\left\{\vec{Y}_t' K \vec{Y}_t - 2\vec{Y}_t' K \vec{Y}^* + \vec{Y}^{*\prime} K \vec{Y}^* + V(\vec{Y}_t, t)\right\}$$

wobei E_{t-1} die Erwartungsbildung bei gegebenem $\vec{Y}_{t-1}$ angibt.

Es gelte:

$$(3\text{-}124) \qquad V(\vec{Y}_t, t+1) = \vec{Y}_t' S_{t+1} \vec{Y}_t - 2\vec{Y}_t' s_{t+1} + c_{t+1}$$

(3-124) und (3-121) ergeben in (3-123) eingesetzt:

---

1) Die Minimierung des Erwartungswertes ist nur eine Möglichkeit der Aufgabenstellung, allerdings eine übliche.
2) Die nachfolgende Darstellung weicht etwas von der Darstellung bei Chow (1975) ab.

$$(3\text{-}125)\qquad V(\vec{Y}_{t-1},t) = \min_{z_t} E_{t-1}\Big\{(\xi_o \vec{Y}_{t-1} + \xi_1 z_t + \xi_2 d_t + \xi_3 + \varepsilon_t)'$$

$$(K+S_{t+1})(\xi_o \vec{Y}_{t-1} + \xi_1 z_t + \xi_2 d_t + \xi_3 + \varepsilon_t)$$

$$- 2(\xi_o \vec{Y}_{t-1} + \xi_1 z_t + \xi_2 d_t + \xi_3 + \varepsilon_t)'$$

$$(K \vec{Y}^* + s_{t+1}) + \vec{Y}^{*\prime} K \vec{Y}^* + c_{t+1}\Big\}$$

Führt man die Erwartungsbildung durch und leitet dann $V(\vec{Y}_{t-1},t)$ nach z_t ab, und setzt dies gleich null, dann ergibt sich für das optimale z_t:

$$\hat{z}_t = -(\xi_1' (K+S_{t+1})\xi_1)^{-1}\Big\{\xi_1' (K+S_{t+1})(\xi_o \vec{Y}_{t-1} + \xi_2 d_t + \xi_3)$$

$$(3\text{-}126)\qquad - \xi_1' (K \vec{Y}^* + s_{t+1})\Big\}$$

$$= \Phi_{1,t} \vec{Y}_{t-1} + \Phi_{2,t}$$

Dies stimmt genau mit (3-81) überein[1], d.h. die optimale Politik ist in beiden Fällen die gleiche. Die optimale Politik in (3-125) eingesetzt ergibt:

---

1) Der Einfachheit halber wurde hier Y^* als von der Zeit unabhängig angenommen.

$$
\begin{aligned}
V(\vec{Y}_{t-1},t) = {} & \vec{Y}'_{t-1}(\xi_o+\xi_1\Phi_{1,t})'(K+S_{t+1})(\xi_o+\xi_1\Phi_{1,t})\vec{Y}_{t-1} \\
& - 2\,\vec{Y}'_{t-1}\,(\xi_o+\xi_1\Phi_{1,t})'\,\Big\{(K\,\vec{Y}^*+s_{t+1}) \\
(3\text{-}127) \qquad & - (K+S_{t+1})(\xi_2\,d_t+\xi_3)\Big\} \\
& - 2\,(\xi_1\Phi_{2,t}+\xi_2\,d_t+\xi_3)'(K\,\vec{Y}^*+s_{t+1})+\vec{Y}^{*\prime}\,K\,\vec{Y}^* \\
& + E_{t-1}(c_{t+1}+\varepsilon'_t\,(S_{t+1}+K)\,\varepsilon_t) \\
& + (\xi_1\Phi_{2,t}+\xi_2 d_t+\xi_3)'(K+S_{t+1})(\xi_1\,\Phi_{2,t}+\xi_2 d_t+\xi_3)
\end{aligned}
$$

(3-127) kann zusammen mit (3-124) wie bei (3-84) bis (3-86) zur Bestimmung von S_t, s_t und c_t verwendet werden. Dabei ist zu beachten, daß unter der Annahme daß ε_t normalverteilt ist mit dem Erwartungswert 0 und der Covarianz var für $E\,\varepsilon'_t(S_{t+1}+K)\,\varepsilon_t$ auch $\mathrm{tr}\,\{(S_{t+1}+K)\,\mathrm{var}\}$ gilt, wobei tr die Spur angibt[1].

Für die Periode T gilt:

$$
(3\text{-}128) \qquad V(\vec{Y}_{T-1},T) = E_{T-1}(\vec{Y}'_T\,K\,\vec{Y}_T - 2\,\vec{Y}'_T\,K\,\vec{Y}^* + \vec{Y}^{*\prime}\,K\,\vec{Y}^*)
$$

Für die optimale Politik gilt dann

$$
\begin{aligned}
(3\text{-}129) \qquad \hat{z}_T = {} & -(\xi'_1\,K\,\xi_1)^{-1}(\xi'_1\,K\,\xi_o\vec{Y}_{T-1}+\xi'_1\,K\,\xi_2\,d_T+\xi'_1\,K\,\xi_3 \\
& - \xi'_1\,K\,\dot{Y}^*) \\
= {} & \Phi_{1,T}\,\vec{Y}_{T-1}+\Phi_{2,T}
\end{aligned}
$$

---

1) Vergleiche dazu K. Aström (1970), S. 262.

Setzt man (3-129) in (3-128) ein und berücksichtigt die üblichen Umformungen, dann gilt:

$$V(\vec{Y}_{T-1},T) = \vec{Y}'_{T-1}\ (\xi_o + \xi_1\Phi_{1,T})'\ K\ (\xi_o + \xi_1\Phi_{1,T})\ \vec{Y}_{T-1}$$

$$- 2\ \vec{Y}'_{T-1}\ (\xi_o + \xi_1\Phi_{1,T})'(K\ \vec{Y}^* - K(\xi_2\ d_T + \xi_3))$$

$$+ (\xi_1\Phi_{2,T} + \xi_2\ d_T + \xi_3)'\ K\ (\xi_1\Phi_{2,T} + \xi_2\ d_T + \xi_3)$$

$$+ \vec{Y}^*\ K\ \vec{Y}^* + tr\ (K\ var)$$

Daraus lassen sich wie in 3.3.2.) dann die Anfangsbedingungen für S_t, s_t und c_t ableiten.

Es hat sich gezeigt, daß die optimale Politik im Falle stochastischer Modelle unter den gemachten Voraussetzungen mit der optimalen Politik des deterministischen Modells übereinstimmt. Da allerdings $\vec{Y}_t$ eine stochastische Größe ist, gilt dies hier im Gegensatz zu früher auch für $\hat{z}_t$. Des weiteren sind, wie auch im statischen Fall, die minimalen Kosten größer als im deterministischen Fall, da K keine negativen, wohl aber positive Glieder hat[1)].

Neben den üblichen Annahmen,die zu einem Störterm ε_t führen, ist in unserem Fall folgende Interpretation von besonderem Interesse: Die Zentralbank kenne die Größe $d_t \ldots d_T$, die für die

---

1) In unserer Beziehung (3-121) ist es wegen (3-75) nur sinnvoll den Störterm ε_t als $(\varepsilon_t, 0, \ldots\ 0)'$ anzunehmen. In diesem Fall ist nur das Glied der 1. Zeile und 1. Spalte von $(S_{t+1} + K)$ von Interesse.

Bestimmung der optimalen Politik erforderlich sind, nicht mit Sicherheit. Vielmehr sei d_t eine Zufallsgröße mit dem Erwartungswert $\overline{d_t}$ und der Varianz $V(d_t)$. Man kann dann d_t aufteilen in $d_t = \overline{d_t} + \varepsilon_{1,t}$, wobei $E(\varepsilon_{1,t}) = 0$ und $E(\varepsilon_{1,t}\, \varepsilon'_{1,t}) = V(d_t)$. Setzt man $\xi_2\, \varepsilon_{1,t} = \varepsilon_t$ dann gilt:

$$\vec{Y}_t = \xi_o\, \vec{Y}_{t-1} + \xi_1\, z_t + \xi_2\, \overline{d_t} + \xi_3 + \varepsilon_t$$

was mit (3-121) übereinstimmt, wenn man beachtet, daß hier $\overline{d_t}$ die Bedeutung des d_t von (3-121) hat, nämlich eine sichere Größe. Unsicherheit über d_t hat damit nach dem vorher gesagten ihren Preis. Es ist damit sinnvoll nach Hypothesen für $d_t \cdots d_T$ zu suchen. Im folgenden Abschnitt und im Teil 4.) werden wir auf dieses Problem zurückkommen.

3.6.2.) Adaptive Erwartungen bei den Geschäftsbanken - Rationale Erwartungen bei der Zentralbank.

Für die Zentralbank ist es im Modell

(3-76) $$\vec{Y}_t = \xi_o\, \vec{Y}_{t-1} + \xi_1\, z_t + \xi_2\, d_t + \xi_3$$

wie schon erwähnt, von wesentlichem Interesse, die Größen $d_t \cdots d_T$ zu kennen, um eine wirklich optimale Politik betreiben zu können. Diese Kenntnis dürfte in der Regel nicht einfach schon vorhanden sein. Es steht der Zentralbank nun noch die Möglichkeit der Schätzung dieser Größen offen. Die Schätzungen unterscheiden sich

nun insbesondere durch die Verwendung unterschiedlicher Informationen. Wir haben im vorangehenden Abschnitt unter anderem angenommen, daß die Zentralbank d_t annimmt als:

$$d_t = \overline{d_t} + \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \sim N\ (0, var)$$

Die optimale Politik für diesen Fall wurde betrachtet. Nun sollen der Zentralbank folgende weitere Informationen zur Verfügung stehen: Das Geschäftsbankenverhalten, wie es in Abschnitt 3.4.) dargestellt wurde, sowie der Erwartungsbildungsprozeß der Geschäftsbanken. Bei diesen Informationen soll die Zentralbank rationale Erwartungen besitzen[1].

Im Abschnitt 3.4.) lösten die Geschäftsbanken die Aufgabe:

$$\text{Min}\quad K_{GB} = \sum_{t=1}^{T} (\vec{D}_t' \, K \, \vec{D}_t - 2 \, \vec{D}_t' \, K \, \vec{D}_t^*)$$

unter der Nebenbedingung:

$$\vec{D}_t = \psi_o \, \vec{D}_{t-1} + \psi_1 \, d_t$$

Dabei hängt $\vec{D}_t^*$ von der jeweiligen Zentralbankgeldmenge ab. Diese wurde im Abschnitt 3.4.) ebenso wie die zukünftig erwünschten Einlagenhöhen $\left\langle \vec{D}_i^* \right\rangle_{i=t+1\ldots T}$ mit Sicherheit von den Geschäftsbanken erwartet. Die Erwartungen wurden auf zwei

---

1) Der Begriff der rationalen Erwartung stammt von J. Muth (1961). Dort heißt es, daß bei Vorliegen von rationalen Erwartungen "expectations ... are essentially the same as the predictions of the relevant economic theory". Muth S. 316. Im deterministischen Modell heißt das, daß der Agent mit rationaler Erwartung vollkommene Voraussicht hat. Da dies nur eine Art der Rationalität ist, wird rational gelegentlich auch in Anführungszeichen gesetzt. Wir verzichten darauf. Für eine ausführliche Behandlung vgl. Teil 4.).

verschiedene Arten gebildet. Allerdings waren diese Erwartungsbildungen nicht ohne weiteres optimal bzw. wurden nicht auf ihre Optimalität überprüft.

Es soll jetzt berücksichtigt werden, daß die Geschäftsbanken $\{z_i\}_{i=t...T}$ und damit $\{\vec{D}^*_i\}_{i=t...T}$ nicht kennen und dies vielmehr schätzen müssen. Die Aufgabe lautet damit:

$$\text{Min } K_{GB} = E_t \left\{ \sum_{t=1}^{T} (\vec{D}'_t \, K \, \vec{D}_t - 2 \, \vec{D}'_t \, K \, \vec{D}^*_t) \right\} = \sum_{t=1}^{T} (\vec{D}'_t \, K \, \vec{D}_t - 2 \, \vec{D}'_t \, K \, E_t \, \vec{D}^*_t)$$

Unter der Nebenbedingung (3-96a) von Seite 88:

$$\vec{D}_t = \psi_o \, \vec{D}_{t-1} + \psi_1 \, d_t$$

Es wird hier angenommen, daß die Geschäftsbanken das dem Zentralbankenverhalten zugrundeliegende Modell und damit natürlich auch die optimale Verhaltensregel der Zentralbank nicht kennen, sondern lediglich die vergangenen Werte der Zentralbankgeldmenge beobachten können. Dabei soll die optimale Zentralbankpolitik der Regel (3-82) gefolgt sein. Für die Geschäftsbanken stellt sich diese Regel dar als:

$$z_t = z_{v,t} + Z_c$$

$z_{v,t}$ fängt dabei die variierenden Einflüsse von z_t auf, Z_c die Konstanten. $z_{v,t}$ hängt insbesondere von $\vec{Y}_{t-1}$ ab, was wiederum wegen (3-76) von $\vec{Y}_{t-2}$ und z_{t-1} abhängt. Es ist damit $z_{v,t}$

autokorreliert. Wir schreiben:

$$z_{v,t} = \varepsilon_t - (1-\beta)\ \varepsilon_{t-1}$$

Es gilt damit:

$$z_t = Z_c + \varepsilon_t - (1-\beta_1)\varepsilon_{t-1}$$

(3-130) oder

$$Z_t = Z_{t-1} + \varepsilon_t - (1-\beta_1)\ \varepsilon_{t-1} + Z_c$$

Unter diesen Umständen ist die optimale Schätzung der Geschäftsbanken für $\left\langle Z_i \right\rangle_{i=t...T}$ im Zeitpunkt t[1]:

$$(3\text{-}131) \qquad E\ Z_{i,t} = \beta_1 \sum_{j=1}^{\infty} (1-\beta_1)^{j-1}\ Z_{i-j} + Z_c$$

und damit für die optimale Schätzung der gewünschten Einlagehöhen $\left\langle E\ D_i^* \right\rangle_{i=t...T}$ im Zeitpunkt t[2]:

$$(3\text{-}132) \qquad E\ D_{i,t}^* = \beta \sum_{j=1}^{\infty} (1-\beta_1)^{j-1}\ Z_{i-j} + D_c \qquad i = t...T$$

Daran ist einmal interessant, daß die Erwartungen bis T im Zeitpunkt t die gleichen sind, daß aber wegen neuer Informa-

---

1) Der Beweis findet sich bei J.F. Muth (1960). (3-131) ist bekanntlich die Lösung des adaptiven Erwartungsprozesses: $E\ Z_{i,t} - E\ Z_{i,t-1} = \beta_1\ (Z_{t-1} - E\ Z_{i,t-1})$

2) Nach Abschnitt 3.4.2.) gilt:

$$D_t = \frac{((1-\iota)\alpha_{13} + \alpha_{11})}{2(\alpha_{23}(1-\iota) + \alpha_{21})}\ Z_t + \frac{(1-\iota)\alpha_{03} - \alpha_{01}}{2(\alpha_{23}(1-\iota) + \alpha_{21})}$$

Setzt man (3-131) ein dann ergibt sich (3-132).

tion in jeder Periode sich die Erwartungen im Zeitpunkt t+1 von denen im Zeitpunkt t unterscheiden.

Für die optimale Politik im Zeitpunkt t ergibt sich jetzt[1]:

$$(3\text{-}133) \qquad \hat{d}_t = -(\psi_1'(K+S_{t+1})\psi_1)^{-1}\left\{\psi_1'(K+S_{t+1})\psi_o \vec{D}_{t-1} - \psi_1'(K\, E\, \vec{D}^*_{t,t} + s_{t+1,t}\right\}$$

$$= \Phi_{1,t}\vec{D}_{t-1} + \Phi_{2,t}(E\vec{D}^*_{t,t}, E\vec{D}^*_{t+1,t}, \ldots, E\vec{D}^*_{T,t})$$

wobei wegen dem oben gesagten

$$E\vec{D}^*_{t,t} = E\vec{D}^*_{t+1,t} = \ldots = E\vec{D}^*_{T,t}$$

und

$$S_t = (\psi_o + \psi_1\Phi_{1,t})'(K+S_{t+1})(\psi_o + \psi_1\Phi_{1,t})$$

$$s_{t,t} = (\psi_o + \psi_1\Phi_{1,t})'(K\, E\, D^*_{t,t} + s_{t+1,t})$$

Es muß bemerkt werden, daß wegen des Auftretens von $\left\langle E\vec{D}^*_t\right\rangle$ in den Beziehungen $\left\langle s_{t,t}\right\rangle$ und damit auch für die $\left\langle \Phi_{2,t}\right\rangle$ diese Folgen in jeder Periode wieder neu zu berechnen sind. Es ist klar, daß unter diesen Umständen closed-loop-Lösungen, die diese Korrektur in jeder Periode wieder vornehmen, abweichen von den open-loop-Lösungen, die diese Korrektur nicht

---

1) Wegen der Besonderheit des Modells hängt d_t nur vom 1. Glied von $\vec{D}_{t-1} = (D_{t-1}, d_{t-1})'$ ab.

vornehmen können[1]. Die Zentralbank benötigt jetzt allerdings nicht nur die Größe $\hat{d}_t$, sondern auch die Größen $\hat{d}_{t\,1} \ldots \hat{d}_T$ im Zeitpunkt t, also Größen, die die Geschäftsbanken zu diesem Zeitpunkt selbst noch nicht kennen. Die Zentralbank kann sich jedoch die optimalen Werte $\hat{d}_{t\,1} \ldots \hat{d}_T$ errechnen, da diese von den jeweiligen $D^{\bullet}$ - Werten abhängen, und diese wiederum eine Funktion vergangener Zentralbankpolitiken sind. Allgemein gilt in Periode T:

$$z_T = f\ (\vec{Y}_{T-1},\ \hat{d}_T)$$

Für $\hat{d}_T$ gilt dabei (vgl. 3-133):

$$\hat{d}_T = g\ (\vec{D}^{\bullet}_{T,T},\ \vec{D}_{T-1})$$

und wegen (3-132):

$$\hat{d}_T = g\ (h(Z_{T-1},\ldots),\ \vec{D}_{T-1})$$

Also gilt:

$$z_T = f\ (\vec{Y}_{T-1},\ g(h(Z_{T-1},\ldots),\ \vec{D}_{T-1}))$$

In Periode T-1 gilt:

$$z_{T-1} = f\ (\vec{Y}_{T-2},\ \hat{d}_{T-1})$$

$$= f\ (\vec{Y}_{T-2},\ g(h(Z_{T-2},\ldots),\ \vec{D}_{T-2}))$$

---

1) Dies ist das analoge Problem zur Differenz zwischen open-loop- und closed-loop-Lösungen in stochastischen Modellen.

etc. Aus der Kenntnis ihres optimalen Verhaltens und der Bildung der d_t durch die Geschäftsbanken, kann die Zentralbank ihre optimale Politik bestimmen, wobei für die Zentralbank die Folge der Zentralbankgeldmengen keine stochastische Folge ist[1)].

In diesem Abschnitt wurden für die Geschäftsbanken und die Zentralbank unterschiedliche Informationen angenommen, und zwar für die Geschäftsbanken wesentlich geringere. Im 4. Teil sollen nun diese Annahmen über die Information weiter variiert werden. Insbesondere sollen Probleme beachtet werden, die auftreten, wenn die Informationen der Geschäftsbanken zunehmen.

4.) Dynamische Modelle mit der expliziten Berücksichtigung zweier Entscheidungseinheiten.

4.1.) Spielsituationen als das Ergebnis rationaler Erwartungen der Zentralbank und der Geschäftsbanken.

Bisher wurde in den dynamischen Modellen, außer im Abschnitt 3.6.2.), davon ausgegangen, daß nur eine der beiden Institutionen Zentralbank oder Geschäftsbanken eine optimale Steuerung betreibt. Steuerten die Geschäftsbanken optimal, dann blieben die Bestimmungsgründe für das Zentralbankverhalten außer acht. (Vgl. 3.4.)) Bei der Zentralbank als Agent wurde im Falle des Geldschöpfungsmultiplikators eine Beziehung der Art

---

1) Dieses Modell ist in einigen Punkten sehr dem Modell der Stackelberg-Lösung im Abschnitt 4.3.3.) verwandt.

$$d_t = f\ (z_t)$$

angenommen, so daß die Zentralbank indirekt auch das Bankenverhalten gesteuert hat. Auch beim Geldschöpfungsmultiplikator im erweiterten Ansatz bestimmte letztendlich alleine die Zentralbank die Politik. Ohne eine derartige Beziehung ergaben sich mehrere andere Möglichkeiten:

-) Alle Aktionen (vergangene, gegenwärtige, zukünftige) der Geschäftsbanken sind der Zentralbank bekannt, ohne daß dies näher begründet wird. Dies ist eine nicht sehr befriedigende Annahme (vgl. 3.3.)). Hierher gehört auch der Fall, bei dem sich die Zentralbank Erwartungen über die Geschäftsbankenpolitik bildet, ohne daß auf die Erwartungsbildung näher eingegangen wurde (vgl. 3.6.1.)).

-) Die zukünftigen Aktionen der Geschäftsbanken werden abgeleitet aus der Kenntnis der Optimierungsregeln und der Erwartungsbildung der Geschäftsbanken (vgl. 3.6.2.)).

In keinem der bisherigen Modelle wurde jedoch angenommen, daß beide Institutionen gleichzeitig sich über die Interdependenz ihrer Aktionen bewußt sind, wie sie im Abschnitt 3.4.4.) dargestellt wurde. Im Abschnitt 3.6.2.) war sich die Zentralbank über diesen Zusammenhang im klaren. Ihre Erwartungen werden als rational bezeichnet. Unser nächstes Ziel ist es, ein Modell zu untersuchen, in dem beide Agenten rationale Erwartungen haben. Zunächst jedoch einige Bemerkungen zum Begriff der rationalen Erwartungen.

Wie in Fußnote 1) auf S. 118 beschrieben, sind rationale Erwartungen solche, die sich aus der zugrundeliegenden ökonomischen Theorie ergeben. Allgemeiner kann definiert werden: "Erwartungen (sind) dann "rational", wenn sie eine unverzerrte Schätzung der zu prognostizierenden Variablen auf der Basis aller Informationen darstellen, die - in verarbeitbarer Form - im Schätzzeitpunkt vorhanden sind"[1]. In der Regel nimmt man nun dabei an, daß die zur Verfügung stehende Information die zugrundeliegende Theorie und die Daten der Gegenwart und Vergangenheit umfaßt[2]. Rationale Erwartungen spielen eine wesentliche Rolle bei der Wirkungsweise der Wirtschaftspolitik. Während in der herkömmlichen, keynesianisch geprägten Betrachtung der Wirtschaftspolitik die Instrumente auf ein System mit festen Parametern wirken, legt die rationale Erwartungshypothese den Schluß nahe, daß mit der Variation der Instrumente auch die Parameter des Systems sich verändern[3], mit der Folge, daß die Wirkungen wirtschaftspolitischer Maßnahmen schwieriger zu kalkulieren sind als im einfachen Modell der starren Parameter[4]. In einigen Modellen geht

---

1) H.-J. Ramser (1976), S. 2

2) Ramser bezeichnet dies als rationale Erwartungen bei vollständiger Information und unterscheidet davon rationale Erwartungen bei unvollständiger Information.

3) Eine ausführliche Begründung findet man hierzu bei R.E. Lucas Jr. (1976). Lucas stellt dabei auch drei Beispiele vor, an denen die Veränderung der Struktur demonstriert wird. Keynes selbst hatte nicht die Vorstellung von derart stabilen Beziehungen, was insbesondere in seinen Kommentaren zur Arbeit Tinbergens deutlich wird. Keynes (1938).

4) Lucas schreibt:"... the individual decision problem:"find an optimal decision rule when certain parameters (future prices, say) follow 'arbitrary' paths" is simply not well formulated. Only trivial problems in which agents can safely ignore the future can be formulated under such a vague description of market constraints. ... we have to attribute to individuals some view of the behavior of the future values of variables of concern to them." Lucas (1976), S. 25. Das ist die Situation, die in allen unseren optimalen Steuerungsmodellen angetroffen wurde. Im Falle etwa des Abschnitts 3.4.) mußten die Geschäftsbanken die zukünftige Entwicklung der Zentralbankpolitik beachten und dies hatte, wie wir dort sahen sofort Auswirkungen auf die Wirkung der Zentralbankpolitik.

dies soweit, daß planmäßiger Wirtschaftspolitik, insbesondere Geldpolitik, jegliche Wirkungsmöglichkeit abgesprochen wird[1]. Modelle, in denen die Parameter eines Systems in der Folge einer Veränderung der Instrumentvariablen variieren, haben auch Arrow und Kurz[2] und Aoki[3] behandelt, ohne dabei die rationale Erwartungshypothese zu verwenden[4]. Dabei werden die in Frage kommenden Entscheidungseinheiten, hier Staat und Private, ebenfalls nicht gleichberechtigt gesehen. Die Betonung liegt vielmehr auf der optimalen Politik des Staates.

Wir werden im Folgenden sowohl für die Zentralbank als auch für die Geschäftsbanken rationale Erwartungen annehmen, d.h. in unserem Fall, daß beide sowohl die Nebenbedingungen als auch beide Zielfunktionale und die Daten der Gegenwart und der Vergangenheit kennen. Damit sind sich beide Agenten darüber bewußt, daß die Wahl der Größe ihrer Instrumentvariable Reaktionen des Partners auslöst, die wiederum auf sie selbst zurückwirken. Dies ist das Wesen einer Spielsituation. Die unserer Problemstellung gerecht werdende Formulierung ist die eines dynamischen Nichtkonstantsummenspiels[5]. Für ein solches Spiel

---

1) T. J. Sargent und N. Wallace (1975a)
T. J. Sargent und N. Wallace (1975b)

2) K. J. Arrow und M. Kurz (1970)

3) M. Aoki (1974)

4) Bei Aoki (1974), S. 54, tritt z.B. folgende Beziehung auf
$(1+\gamma)\ k_{p,t+1} = k_{p,t} + S_t\ (1-u^s_t)\ y_t$

mit u^s_t: Steuersatz einer Steuer auf das Sparen
S_t: Sparneigung
$k_{p,t}$: privater pro-Kopf Kapitalstock

u^s_t ist die Steuergröße des Staates, $k_{p,t}$ die Zielgröße. Die Beziehung kann jedoch nicht als eine lineare Instrumenten-Ziel-Gleichung des üblichen Typs verstanden werden, da angenommen wird, daß die Privaten mit ihrer Sparneigung auf Steuersatzänderungen in der Art $\partial s/\partial u^s_t < 0$ reagieren. Diese Abhängigkeit wird jedoch nicht explizit, etwa mit Hilfe eines Optimierungsansatzes für die Privaten, begründet. Derartige Probleme führen zu bilinearenSystemen, bei denen unabhängige und abhängige Variablen multiplikativ miteinander verknüpft sind und die wesentlich schwieriger zu behandeln sind als lineare Systeme. Ansätze zur Lösung etwa bei Samy und Tarn (1973).

5) Statt Nichtkonstantsummenspiel wird auch gelegentlich der Begriff Nichtnullenspiel verwandt.

bieten sich mehrere Lösungen an, die auf unterschiedlichen Strategien beruhen. Je nach der Strategie des einzelnen Spielers wird seine Reaktion auf Aktionen seines Partners verschieden sein. Damit ist eine weitere Information neben den oben angeführten, die für die Erwartungsbildung eine Rolle spielt, die Kenntnis der gewählten Strategie des Mitspielers. Es wird sich zeigen, welche Bedeutung für die Lösungen es hat, ob diese zusätzliche Information für die Erwartungsbildung zur Verfügung steht oder nicht[1].

In den nachfolgenden Abschnitten werden verschiedene Gleichgewichtslösungen dargestellt, jedoch wird nicht ihre Stabilität gezeigt. Das Problem der Stabilität ist noch nicht gelöst[2].

4.2.) Das Modell einer Spielsituation.

In dem neuen Modell sind die Kostenfunktionale für beide Institutionen und die gesamten Nebenbedingungen zu berücksichtigen. Das heißt hier, es sind die Nebenbedingungen (3-75) und (3-94) zu integrieren und die beiden Kostenfunktionale (3-77) und (3-95) zu beachten. Zu diesem Zweck wird das System der Nebenbedingungen umgeschrieben:

---

1) F. Kydland (1975), S. 322, bezeichnet solche Erwartungen in einer Spielsituation als rational, die die richtigen Aktionen des Mitspielers vorhersagen, d.h. daß neben der Kenntnis von Zielfunktionalen und Nebenbedingungen auch die Wahl der Strategie des Mitspielers richtig erwartet wird. Da bei ein und denselben Zielfunktionalen und Nebenbedingungen, die das eigentliche Modell darstellen, mehrere Strategien möglich sind, wird der Begriff der Rationalität hier umfassender verstanden als etwa bei Muth (1961). Man kann jedoch den hier verwandten Begriff der rationalen Erwartungen verstehen als eine adäquate Erweiterung des Muthschen Begriffs auf Spielsituationen.

2) F. Kydland (1975), S. 333

$$(4\text{-}1a)\qquad \begin{pmatrix} Y_t \\ Y_{t-1} \\ D_t \\ Z_t \\ d_t \\ z_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+g_1-e_2), (e_2g_1-g_1), 0, 0, 0, 0 \\ 1 \quad , \quad 0 \quad , 0, 0, 0, 0 \\ 0 \quad , \quad 0 \quad , 1, 0, 0, 0 \\ 0 \quad , \quad 0 \quad , 0, 1, 0, 0 \\ 0 \quad , \quad 0 \quad , 0, 0, 0, 0 \\ 0 \quad , \quad 0 \quad , 0, 0, 0, 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{t-1} \\ Y_{t-2} \\ D_{t-1} \\ Z_{t-1} \\ d_{t-1} \\ z_{t-1} \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} e_1e_2\alpha_{22}(1) \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} z_t + \begin{pmatrix} e_1e_2\alpha_{22}(1) \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} d_t + \begin{pmatrix} e_2g_o \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

oder mit vereinfachter Schreibweise:

$$(4\text{-}1)\qquad \vec{Y}_t = m_o \vec{Y}_{t-1} + m_1 z_t + m_2 d_t + m_3$$

Für die Zentralbank gilt das alte Kostenfunktional, wegen der neuen Definition von Y_t allerdings etwas umgeschrieben:

$$(4\text{-}2a)\quad K_{ZB} = \sum_{t=1}^{T} \Bigg\{ (Y_t, Y_{t-1}, D_t, Z_t, d_t, z_t) \begin{pmatrix} k_{1,ZB}, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0 & , & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0 & , & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0 & , & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0 & , & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0 & , & 0, & 0, & 0, & 0, k_{2ZB} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_t \\ Y_{t-1} \\ D_t \\ Z_t \\ d_t \\ z_t \end{pmatrix}$$

$$- 2\,(Y_t, Y_{t-1}, D_t, Z_t, d_t, z_t) \begin{pmatrix} k_{1,ZB} & 0 \ldots\ldots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 \quad 0 \\ 0 \ldots\ldots & & k_{2,ZB} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_v \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{const.} \Bigg\}$$

Unter Vernachlässigung der unwesentlichen Konstanten kann geschrieben werden:

$$(4\text{-}2)\qquad K_{ZB} = \sum_{t=1}^{T} \left\{ \vec{Y}_t' \, K_1 \, \vec{Y}_t - 2 \, \vec{Y}_t' \, k_1 \right\}$$

Beim Kostenfunktional der Geschäftsbanken wird angenommen, daß Kosten durch Abweichungen vom Zielwert und durch die Veränderungen der Einlagen entstehen (Instrumentenkosten). Für den Gewinn der Geschäftsbanken gilt[1]:

---

1) Vgl. Abschnitt 3.4.). Es wurde hier jedoch nicht genau wie in Abschnitt 3.4.) vorgegangen. Hier ist nun K_2 positiv semidefinit, was einige weitere Überlegungen im Abschnitt 4.3.1.) vereinfacht.

$$G_t = \left\{(1-\iota_t)(\alpha_{03} - \alpha_{13}Z_t) - \alpha_{01}\,\alpha_{11}Z_t\right\} D_t - \left\{\alpha_{23}(1-\iota_t) + \alpha_{21}\right\} D_t^2 - \text{const.}$$

Die Einlage, die den Gewinn maximiert, ergibt sich, wenn man die Instrumentenkosten nicht berücksichtigt, als:

$$\frac{\partial G_t}{\partial D_t} = (1-\iota_t)(\alpha_{03} - \alpha_{13}Z_t) - \alpha_{01} + \alpha_{11}Z_t - 2(\alpha_{23}(1-\iota_t) + \alpha_{21})D_t^* = 0$$

$$D_t^* = \frac{(1-\iota_t)\,\alpha_{03} - \alpha_{01}}{2(\alpha_{23}(1-\iota_t) + \alpha_{21})} + \frac{\alpha_{11} - (1-\iota_t)\,\alpha_{13}}{2(\alpha_{23}(1-\iota_t) + \alpha_{21})} Z_t = \gamma_1 + \gamma_2 Z_t$$

Die Kosten ergeben sich dann als:

$$K_{GB} = \sum_{t=1}^{T} \left\{k_{1,GB}\,(D_t^* - D_t)^2 + k_{2,GB}\,d_t^2\right\}$$

Und in der Schreibweise des Modells:

$$(4\text{-}3a)\quad K_{GB} = \sum_{t=1}^{T} \left\{ (Y_t, Y_{t-1}, D_t, Z_t, d_t, z_t) \begin{pmatrix} 0, & 0, & 0 & , & 0 & , & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0 & , & 0 & , & 0, & 0 \\ 0, & 0, & k_{1,GB}, & & -\gamma_2 k_{1,GB}, & & 0, & 0 \\ 0, & 0, & -\gamma_2 k_{1,GB}, & & \gamma_2^2 k_{1,GB}, & & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0 & , & 0 & , & k_{2,GB} & 0 \\ 0, & 0, & 0 & , & 0 & , & 0, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_t \\ Y_{t-1} \\ D_t \\ Z_t \\ d_t \\ z_t \end{pmatrix} \right.$$

$$\left. - 2(Y_t, Y_{t-1}, D_t, Z_t, d_t, z_t) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma_1 k_{1,GB} \\ \gamma_1 \gamma_2 k_{1,GB} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{const}' \right\}$$

Und vereinfacht,unter Vernachlässigung der konstanten Glieder:

$$(4\text{-}3) \qquad K_{GB} = \sum_{t=1}^{T} \left\{ \vec{Y}_t' \, K_2 \, \vec{Y}_t - 2 \, \vec{Y}_t' \, k_2 \right\}$$

Anhand von (4-2) und (4-3) kann nun einiges über den Charakter des Spiels ausgesagt werden. Wären K_2 und K_1 bzw. k_2 und k_1 derart, daß $K_2 = - K_1$ und $k_2 = - k_1$ dann würde die Addition der beiden Kosten immer gerade null ergeben, d.h. es handelte sich um ein Nullsummenspiel. Dabei ist der Vorteil des einen Spielers immer gerade der Nachteil des anderen Spielers. Wie man aus einem Vergleich sieht, ist dies nicht der Fall. Wir haben es, wie oben schon erwähnt, mit einem Nichtkonstantsummenspiel zu tun. Stimmten dagegen K_2 und K_1 bzw. k_2 und k_1 miteinander überein, dann ergäben sich keine Konfliktsituationen, da beide identische Ziele hätten. Auch das trifft, wie man sieht, für dieses Modell nicht zu[1)].

4.3.) Lösungskonzepte

4.3.1.) Nash - Lösungen

Für Nichtkonstantsummenspiele ist charakteristisch, daß es nicht einen einzig gültigen Lösungstyp gibt. Je nach Situation ist vielmehr die Wahl aus mehreren Möglichkeiten zu treffen. Die

---

1) Bei dem Vergleich zwischen K_1 und K_2 bzw. k_1 und k_2 ist der Zusammenhang, der über die Nebenbedingungen hergestellt wird,zu beachten. Dann wird klar, daß die Minimierungen nicht unabhängig voneinander sind. Dieses Problem wurde schon in 3.4.4.) angesprochen.

Nash-Lösung[1] ist eine Möglichkeit, die vielen Situationen gerecht wird.

Eine Nash-Gleichgewichts-Lösung $(\{d_t^n\}, \{z_t^n\})$ liegt vor, wenn für die Zentralbank gilt:

$$K_{ZB}(\{d_t^n\}, \{z_t\}) \geq K_{ZB}(\{d_t^n\}, \{z_t^n\})$$

und für die Geschäftsbanken gilt:

$$K_{GB}(\{d_t\}, \{z_t^n\}) \geq K_{GB}(\{d_t^n\}, \{z_t^n\})$$

wobei $\{d_t\}$ und $\{z_t\}$ für alle zulässigen Steuerungsfolgen stehen. Daraus wird klar, daß, unter der Voraussetzung, daß der Mitspieler (die Geschäftsbanken bzw. die Zentralbank) einer Nash-Strategie folgt, der Spieler (die Zentralbank bzw. die Geschäftsbanken) seine Kosten minimiert, wenn er eine Nash-Steuerung verwirklicht. Die Nash-Lösung hat den Vorteil großer Stabilität: Für keinen Spieler ist es von Vorteil einseitig von der Nash-Lösung abzuweichen, solange der Mitspieler seine Nash-Lösung nicht verläßt[2]. Kommen wir nun zu Einzelheiten der Lösung unseres speziellen Problems[3]:

Beginnen wir mit der Lösung für die Zentralbank:

---

1) Nash-Lösungen werden auch als nichtkooperative Lösungen bezeichnet. Vgl. F. Kydland (1975). Sie entsprechen der Cournot-Lösung im statischen Fall.

2) Da wir es hier mit einem Zwei-Personen-Spiel zu tun haben sind nur die Fälle daß keine Koalition auftritt und daß alle Spieler miteinander koalieren denkbar. Das verleiht der Nash-Lösung eine noch größere Bedeutung.

3) Unsere nachfolgende Behandlung lehnt sich eng an F. Kydland (1975) an. Grundlegende Überlegungen zu Nash-Lösungen für dynamische Nichtnullsummenspiele werden bei Starr und Ho (1975a) und (1975b) gemacht.

Wir verwenden die Bellman-Gleichung, die für die Zentralbank lautet[1]:

$$(4\text{-}4) \qquad V_{ZB}(\vec{Y}_{t-1},t) = \min_{z_t} \left\{ \vec{Y}_t' K_1 \vec{Y}_t - 2 \vec{Y}_t' k_1 + V_{ZB}(\vec{Y}_t,t+1) \right\}$$

Angenommen es gilt:

$$(4\text{-}5) \qquad V_{ZB}(\vec{Y}_t,t+1) = \vec{Y}_t' S_{ZB,t+1} \vec{Y}_t - 2 \vec{Y}_t' s_{ZB,t+1} + c_{ZB,t+1}$$

(4-5) und (4-1) in (4-4) eingesetzt ergibt dann:

$$(4\text{-}6) \qquad V_{ZB}(\vec{Y}_{t-1},t) = \min_{z_t} \Big\{ (m_o \vec{Y}_{t-1} + m_1 z_t + m_2 d_t + m_3)' (K_1 + S_{ZB,t+1}) \cdot (m_o \vec{Y}_{t-1} + m_1 z_t + m_2 d_t + m_3) - 2 (m_o \vec{Y}_{t-1} + m_1 z_t + m_2 d_t + m_3)' (k_1 + s_{ZB,t+1}) + c_{ZB,t+1} \Big\}$$

$$\frac{\partial V_{ZB}}{\partial z_t} = 2 (m_1' (K_1 + S_{ZB,t+1}) (m_o \vec{Y}_{t-1} + m_1 z_t + m_2 d_t + m_3) - 2 m_1' (k_1 + s_{ZB,t+1}) = 0$$

---

1) Wie erwähnt ist eine Besonderheit dynamischer Nichtkonstantsummenspiele, daß es keinen eindeutigen Lösungstyp gibt. Das ist darauf zurückzuführen, daß hier kein eindeutiger Optimalitätsbegriff existiert. Aus diesem Grund muß das Optimalitätsprinzip und die Bellman-Gleichung in einer modifizierten Bedeutung als Minimierung der Kosten eines Agenten unter vorgegebenen Aktionen der restlichen Spieler verwendet werden. Das heißt die Bellman-Gleichung (4-4) führt nicht direkt zu einem globalen Minimum für das gesamte System. Es muß vielmehr für jeden Agenten eine gesonderte Bellman-Gleichung aufgestellt werden, und alle Ergebnisse in Einklang gebracht werden. Vgl. dazu Abschnitt 4.3.5.).

$$(4\text{-}7)\quad z_t = -\left(m_1'(K_1+S_{ZB,t+1})m_1\right)^{-1}\Big\{m_1'(K_1+S_{ZB,t+1})m_o\,\vec{Y}_{t-1}$$

$$+\left(m_1'(K_1+S_{ZB,t+1})(m_2 d_t+m_3)\right) - m_1'(k_1+s_{ZB,t+1})\Big\}$$

Das ist die Reaktionsfunktion der Zentralbank.

Für die Lösung bei den Geschäftsbanken gilt:

$$(4\text{-}8)\quad V_{GB}\,(\vec{Y}_{t-1},t) = \min_{d_t}\Big\{\vec{Y}_t'\,K_2\,\vec{Y}_t - 2\,\vec{Y}_t'\,k_2 + V_{GB}(\vec{Y}_t,t+1)\Big\}$$

Angenommen es gilt:

$$(4\text{-}9)\quad V_{GB}(\vec{Y}_t,t+1) = \vec{Y}_t'\,S_{GB,t+1}\,\vec{Y}_t - 2\,\vec{Y}_t'\,s_{GB,t+1} + c_{GB,t+1}$$

(4-9) und (4-1) in (4-8) eingesetzt ergibt:

$$(4\text{-}10)\quad V_{GB}(\vec{Y}_{t-1},t) = \min_{d_t}\Big\{(m_o\vec{Y}_{t-1}+m_1z_t+m_2d_t+m_3)'(K_2+S_{GB,t+1})$$

$$\cdot(m_o\vec{Y}_{t-1}+m_1z_t+m_2d_t+m_3)$$

$$-2\,(m_o\vec{Y}_{t-1}+m_1z_t+m_2d_t+m_3)'(k_2+s_{GB,t+1})+c_{GB,t+1}\Big\}$$

$$\frac{\partial V_{GB}}{\partial d_t} = 2\,m_2'\,(K_2+S_{GB,t+1})(m_o\vec{Y}_{t-1}+m_1z_t+m_2d_t+m_3) - 2\,m_2'(k_2+s_{GB,t+1}) = 0$$

$$(4\text{-}11)\quad d_t = -\left(m_2'(K_2+S_{GB,t+1})m_2'\right)^{-1}\Big\{m_2'(K_2+S_{GB,t+1})m_o\vec{Y}_{t-1}$$

$$+\,m_2'(K_2+S_{GB,t+1})(m_1z_t+m_3) - m_2'(k_2+s_{GB,t+1})\Big\}$$

Das ist die Reaktionsfunktion der Geschäftsbanken.

Die Nash-Gleichgewichts-Lösungen müssen demnach folgende Beziehungen erfüllen:

$$m_1'(K_1+S_{ZB,t+1})\, m_1 z_t^n + m_1'(K_1+S_{ZB,t+1}) m_2 d_t^n = -m_1'(K_1+S_{ZB,t+1}) m_o \vec{Y}_{t-1}$$

$$- m_1'(K_1+S_{ZB,t+1}) m_3 + m_1'(k_1+s_{ZB,t+1})$$

$$m_2'(K_2+S_{GB,t+1}) m_1 z_t^n + m_2'(K_2+S_{GB,t+1}) m_2 d_t^n = - m_2'(K_2+S_{GB,t+1}) m_o \vec{Y}_{t-1}$$

$$- m_2'(K_2+S_{GB,t+1}) m_3 + m_2'(k_2+s_{GB,t+1})$$

$$(4\text{-}12) \quad \begin{pmatrix} m_1'(K_1+S_{ZB,t+1}) \\ m_2'(K_2+S_{GB,t+1}) \end{pmatrix} (m_1, m_2) \begin{pmatrix} z_t^n \\ d_t^n \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} m_1'(K_1+S_{ZB,t+1}) \\ m_2'(K_2+S_{GB,t+1}) \end{pmatrix} m_o \vec{Y}_{t-1}$$

$$- \begin{pmatrix} - m_1'(k_1+s_{ZB,t+1}) + m_1'(K_1+S_{ZB,t+1}) m_3 \\ - m_2'(k_2+s_{GB,t+1}) + m_2'(K_2+S_{GB,t+1}) m_3 \end{pmatrix}$$

Oder kurz:

$$\hat{S}_t \, M \begin{pmatrix} z_t^n \\ d_t^n \end{pmatrix} = - \hat{S}_t \, m_o \vec{Y}_{t-1} - \hat{s}_t$$

$$(4\text{-}13) \quad \begin{pmatrix} z_t^n \\ d_t^n \end{pmatrix} = - (\hat{S}_t \, M)^{-1} \hat{S}_t \, m_o \vec{Y}_{t-1} - (\hat{S}_t \, M)^{-1} \hat{s}_t$$

Es sind nun noch die Gleichungen für $S_{ZB,t}$, $S_{GB,t}$, $s_{ZB,t}$,

$s_{GB,t}$, $c_{ZB,t}$, $c_{GB,t}$ zu bestimmen.

(4-6) kann geschrieben werden als:

$$V_{ZB}(\vec{Y}_{t-1},t) = \min_{z_t} \Big\{ (m_o \vec{Y}_{t-1} + M \begin{pmatrix} z_t \\ d_t \end{pmatrix} + m_3)' (K_1 + S_{ZB,t+1}) (m_o \vec{Y}_{t-1} + M \begin{pmatrix} z_t \\ d_t \end{pmatrix} + m_3)$$

$$- 2 (m_o \vec{Y}_{t-1} + M \begin{pmatrix} z_t \\ d_t \end{pmatrix} + m_3)' (k_1 + s_{ZB,t+1}) + c_{ZB,t+1} \Big)$$

Da (4-13) die Minimierung bei vorgegebenem d_t^n erfüllt, gilt:

$$V_{ZB}(\vec{Y}_{t-1},t) = \Big\{ (m_o \vec{Y}_{t-1} - M \left[(\hat{S}_t M)^{-1} \hat{S}_t m_o \vec{Y}_{t-1} + (\hat{S}_t M)^{-1} \hat{s}_t \right] + m_3)'$$

$$(K_1 + S_{ZB,t+1}) (m_o \vec{Y}_{t-1} - M \left[(\hat{S}_t M)^{-1} \hat{S}_t m_o Y_{t-1} + (\hat{S}_t M)^{-1} \hat{s}_t \right]$$

$$+ m_3) - 2 (m_o \vec{Y}_{t-1} - M \left[(\hat{S}_t M)^{-1} \hat{S}_t m_o \vec{Y}_{t-1} + (\hat{S}_t M)^{-1} \hat{s}_t \right]$$

$$+ m_3)' (k_1 + s_{ZB,t+1}) + c_{ZB,t+1} \Big\}$$

Darin sind enthalten als

-) quadratische Glieder in $\vec{Y}_{t-1}$:

$$\vec{Y}'_{t-1} (m_o - M (\hat{S}_t M)^{-1} \hat{S}_t m_o)' (K_1 + S_{ZB,t+1}) (m_o - M (\hat{S}_t M)^{-1} \hat{S}_t m_o) \vec{Y}_{t-1}$$

-) lineare Glieder in $\vec{Y}_{t-1}$ [1]:

---

1) Es entfallen hier nicht wie im Falle der Steuerung durch eine Instanz Glieder (vgl. S. 79), da in der Bestimmung von V_{ZB} die Größen der Geschäftsbanken mit eine Rolle spielen und umgekehrt. So ergibt sich keine Symmetrie wie im Falle der einfachen optimalen Steuerungsprobleme.

$$- 2\,\vec{Y}'_{t-1}(-m_o + M(\hat{S}_t\,M)^{-1}\hat{S}_t\,m_o)'(K_1+S_{ZB,t+1})(m_3 - M(\hat{S}_t\,M)^{-1}\,\hat{s}_t)$$

$$+ 2\,\vec{Y}'_{t-1}(-m_o + M(\hat{S}_t\,M)^{-1}\hat{S}_t\,m_o)'(k_1+s_{ZB,t+1})$$

-) Glieder ohne $\vec{Y}_{t-1}$:

$$(m_3 - M(\hat{S}_t\,M)^{-1}\,\hat{s}_t)'(K_1+S_{ZB,t+1})(m_3 - M(\hat{S}_t\,M)^{-1}\,\hat{s}_t$$

$$- 2\,(m_3 - M(\hat{S}_t\,M)^{-1}\,\hat{s}_t)'(k_1+s_{ZB,t+1}) + c_{ZB,t+1}$$

Wegen (4-5) gelten dann die drei Differenzengleichungen:

(4-14) $$S_{ZB,t} = (m_o - M(\hat{S}_t\,M)^{-1}\hat{S}_t m_o)'(K_1+S_{ZB,t+1})(m_o - M(\hat{S}_t\,M)^{-1}\,\hat{S}_t m_o)$$

(4-15) $$s_{ZB,t} = (-m_o + M(\hat{S}_t\,M)^{-1}\hat{S}_t m_o)'(K_1+S_{ZB,t+1})(m_3 - M(\hat{S}_t\,M)^{-1}\,\hat{s}_t)$$

$$- (-m_o + M(\hat{S}_t\,M)^{-1}\hat{S}_t m_o)'(k_1+s_{ZB,t+1})$$

(4-16) $$c_{ZB,t} = c_{ZB,t+1} + (m_3 - M(\hat{S}_t\,M)^{-1}\,\hat{s}_t)'(K_1+S_{ZB,t+1})(m_3 - M(\hat{S}_t\,M)^{-1}\,\hat{s}_t)$$

$$- 2\,(m_3 - M(\hat{S}_t\,M)^{-1}\,\hat{s}_t)'(k_1+s_{ZB,t+1})$$

Kommen wir nun zu den Lösungen für $S_{GB,t}$, $s_{GB,t}$, $c_{GB,t}$, die sich aus den analogen Schritten ergeben. (4-10) kann geschrieben werden als:

$$V_{GB}(\vec{Y}_{t-1},t) = \min_{d_t} \{(m_o\vec{Y}_{t-1} + M\begin{pmatrix} z_t \\ d_t \end{pmatrix} + m_3)'(K_2+S_{GB,t+1})(m_o\vec{Y}_{t-1} + M\begin{pmatrix} z_t \\ d_t \end{pmatrix} + m_3)$$

$$- 2\,(m_o\vec{Y}_{t-1} + M\begin{pmatrix} z_t \\ d_t \end{pmatrix} + m_3)'(k_2+s_{GB,t+1}) + c_{GB,t+1}\}$$

Da (4-13) die Minimierung bei vorgegebenem z_t^n erfüllt, gilt:

$$V_{GB}(\vec{Y}_{t-1},t) = (m_o\vec{Y}_{t-1} - M\,[(\hat{S}_t\,M)^{-1}\hat{S}_t m_o Y_{t-1} + (\hat{S}_t\,M)^{-1}\,\hat{s}_t] + m_3)'$$

$$(K_2+S_{GB,t+1})(m_o\vec{Y}_{t-1} - M\,[(\hat{S}_t\,M)^{-1}\hat{S}_t m_o Y_{t-1} + (\hat{S}_t\,M)^{-1}\,\hat{s}_t]$$

$$+ m_3) - 2\,(m_o\vec{Y}_{t-1} - M\,[(\hat{S}_t\,M)^{-1}\hat{S}_t m_o Y_{t-1} + (\hat{S}_t\,M)^{-1}\,\hat{s}_t] + m_3)'$$

$$(k_2+s_{GB,t+1}) + c_{GB,t+1}$$

-) quadratische Glieder in $\vec{Y}_{t-1}$:

$$\vec{Y}'_{t-1}(m_o - M(\hat{S}_t\,M)^{-1}\hat{S}_t m_o)'(K_2+S_{GB,t+1})(m_o - M(\hat{S}_t\,M)^{-1}\hat{S}_t m_o)\vec{Y}_{t-1}$$

-) lineare Glieder in $\vec{Y}_{t-1}$:

$$- 2\,\vec{Y}'_{t-1}(-m_o + M(\hat{S}_t\,M)^{-1}\hat{S}_t m_o)'(K_2+S_{GB,t+1})(m_3 - M(\hat{S}_t\,M)^{-1}\,\hat{s}_t)$$

$$+ 2\,\vec{Y}'_{t-1}(-m_o + M(\hat{S}_t\,M)^{-1}\hat{S}_t m_o)'(k_2+s_{GB,t+1})$$

-) Glieder ohne $\vec{Y}_{t-1}$:

$$(m_3 - M(\hat{S}_t\, M)^{-1}\hat{s}_t)'(K_2+S_{GB,t+1})(m_3 - M(\hat{S}_t\, M)^{-1}\,\hat{s}_t)$$

$$- 2\,(m_3 - M(\hat{S}_t\, M)^{-1}\hat{s}_t)'(k_2+s_{GB,t+1})+c_{GB,t+1}$$

Wegen (4-9) gilt dann:

$$(4\text{-}17)\quad S_{GB,t} = (m_o - M(\hat{S}_t\, M)^{-1}\hat{S}_t m_o)'(K_2+S_{GB,t+1})(m_o - M(\hat{S}_t\, M)^{-1}\hat{S}_t m_o)$$

$$(4\text{-}18)\quad s_{GB,t} = (-m_o + M(\hat{S}_t\, M)^{-1}\hat{S}_t m_o)'(K_2+S_{GB,t+1})(m_3 - M(\hat{S}_t\, M)^{-1}\hat{s}_t)$$

$$- (-m_o + M(\hat{S}_t\, M)^{-1}\hat{S}_t m_o)'(k_2+s_{GB,t+1})$$

$$(4\text{-}19)\quad c_{GB,t} = c_{GB,t+1} + (m_3 - M(\hat{S}_t\, M)^{-1}\hat{s}_t)'(K_2+S_{GB,t+1})(m_3 - M(\hat{S}_t\, M)^{-1}\hat{s}_t)$$

$$- 2\,(m_3 - M(\hat{S}_t\, M)^{-1}\hat{s}_t)'(k_2+s_{GB,t+1})$$

Es sind jetzt noch die Anfangsbedingungen (besser Endbedingungen) für (4-14) bis (4-19) zu bestimmen. Zunächst für (4-14) bis (4-16). In Periode T gilt:

$$V_{ZB}(\vec{Y}_{T-1},T) = (m_o\vec{Y}_{T-1} - M\left[(\hat{S}_T\, M)^{-1}\hat{S}_T m_o Y_{T-1} + (\hat{S}_T\, M)^{-1}\hat{s}_T\right] + m_3)'$$

$$K_1(m_o\vec{Y}_{T-1} - M\left[(\hat{S}_T\, M)^{-1}\hat{S}_T m_o Y_{T-1} + (\hat{S}_T\, M)^{-1}\hat{s}_T\right] + m_3)$$

$$- 2\,(m_o\vec{Y}_{T-1} - M\left[(\hat{S}_T\, M)^{-1}\hat{S}_T m_o Y_{T-1} + (\hat{S}_T\, M)^{-1}\hat{s}_T\right] + m_3)'k_1$$

mit: $\hat{S}_T = \begin{pmatrix} m_1'K_1 \\ m_2'K_2 \end{pmatrix}$; $\hat{s}_T = \left(\begin{pmatrix} m_1'K_1 \\ m_2'K_2 \end{pmatrix} M\right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -m_1'k_1 + m_1'K_1\, m_3 \\ -m_2'k_2 + m_2'K_2\, m_3 \end{pmatrix}$

Daraus folgt:

$$(4\text{-}20)\quad S_{ZB,T} = \left(m_o - M \left(\begin{pmatrix} m_1' K_1 \\ m_2' K_2 \end{pmatrix} M \right)^{-1} \begin{pmatrix} m_1' K_1 \\ m_2' K_2 \end{pmatrix} m_o \right)' \cdot$$

$$K_1 \left(m_o - M \left(\begin{pmatrix} m_1' K_1 \\ m_2' K_2 \end{pmatrix} M \right)^{-1} \begin{pmatrix} m_1' K_1 \\ m_2' K_2 \end{pmatrix} m_o \right)$$

$$(4\text{-}21)\quad s_{ZB,T} = \left(- m_o + M \left(\begin{pmatrix} m_1' K_1 \\ m_2' K_2 \end{pmatrix} M \right)^{-1} \begin{pmatrix} m_1' K_1 \\ m_2' K_2 \end{pmatrix} m_o \right)' K_1$$

$$\left(m_3 - M \left(\begin{pmatrix} m_1' K_1 \\ m_2' K_2 \end{pmatrix} M \right)^{-1} \left(\begin{pmatrix} m_1' K_1 \\ m_2' K_2 \end{pmatrix} M \right)^{-1} \begin{pmatrix} -m_1' k_1 + m_1' K_1 m_3 \\ -m_2' k_2 + m_2' K_2 m_3 \end{pmatrix} \right)$$

$$\left(- m_o + M \left(\begin{pmatrix} m_1' K_1 \\ m_2' K_2 \end{pmatrix} M \right)^{-1} \begin{pmatrix} m_1' K_1 \\ m_2' K_2 \end{pmatrix} m_o \right)' k_1$$

$$(4\text{-}22)\quad c_{ZB,T} = \left(m_3 - M \left(\begin{pmatrix} m_1' K_1 \\ m_2' K_2 \end{pmatrix} M \right)^{-1} \left(\begin{pmatrix} m_1' K_1 \\ m_2' K_2 \end{pmatrix} M \right)^{-1} \begin{pmatrix} -m_1' k_1 + m_1' K_1 m_3 \\ -m_2' k_2 + m_2' K_2 m_3 \end{pmatrix} \right)'$$

$$K_1 \left(m_3 - M \left(\begin{pmatrix} m_1' K_1 \\ m_2' K_2 \end{pmatrix} M \right)^{-1} \left(\begin{pmatrix} m_1' K_1 \\ m_2' K_2 \end{pmatrix} M \right)^{-1} \begin{pmatrix} -m_1' k_1 + m_1' K_1 m_3 \\ -m_2' k_2 + m_2' K_2 m_3 \end{pmatrix} \right)$$

$$- 2 \left(m_3 - M \left(\begin{pmatrix} m_1' K_1 \\ m_2' K_2 \end{pmatrix} M \right)^{-1} \left(\begin{pmatrix} m_1' K_1 \\ m_2' K_2 \end{pmatrix} M \right)^{-1} \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} - m_1' k_1 + m_1' K_1 m_3 \\ - m_2' k_2 + m_2' K_2 m_3 \end{pmatrix} \right)' k_1$$

Nun zu den Endbedingungen für (4-17) bis (4-19). Die minimalen Kosten der Geschäftsbanken in T ergeben sich aus:

$$V_{GB}(\vec{Y}_{T-1}, T) = (m_o \vec{Y}_{T-1} - M \left[(\hat{S}_T M)^{-1} \hat{S}_T m_o Y_{T-1} + (\hat{S}_T M)^{-1} \hat{s}_T \right] + m_3)' K_2$$

$$(m_o \vec{Y}_{T-1} - M \left[(\hat{S}_T M)^{-1} \hat{S}_T m_o Y_{T-1} + (\hat{S}_T M)^{-1} \hat{s}_T \right] + m_3)$$

$$- 2 (m_o \vec{Y}_{T-1} - M \left[(\hat{S}_T M)^{-1} \hat{S}_T m_o \vec{Y}_{T-1} + (\hat{S}_T M)^{-1} \hat{s}_T \right] + m_3)' k_2$$

und damit:

$$(4\text{-}23)\quad S_{GB,T} = \left(m_o - M \left(\begin{pmatrix} m_1' K_1 \\ m_2' K_2 \end{pmatrix} M \right)^{-1} \begin{pmatrix} m_1' K_1 \\ m_2' K_2 \end{pmatrix} m_o \right)' K_2 \left(m_o - M \right.$$

$$\left. \cdot \left(\begin{pmatrix} m_1' K_1 \\ m_2' K_2 \end{pmatrix} M \right)^{-1} \begin{pmatrix} m_1' K_1 \\ m_2' K_2 \end{pmatrix} m_o \right)$$

$$(4\text{-}24)\quad s_{GB,T} = \left(- m_o + M \left(\begin{pmatrix} m_1' K_1 \\ m_2' K_2 \end{pmatrix} M \right)^{-1} \begin{pmatrix} m_1' K_1 \\ m_2' K_2 \end{pmatrix} m_o \right)' K_2$$

$$\left(m_3 - M \left(\begin{pmatrix} m_1' K_1 \\ m_2' K_2 \end{pmatrix} M \right)^{-1} \left(\begin{pmatrix} m_1' K_1 \\ m_2' K_2 \end{pmatrix} M \right)^{-1} \begin{pmatrix} -m_1' k_1 + m_1' K_1 m_3 \\ -m_2' k_2 + m_2' K_2 m_3 \end{pmatrix} \right)$$

$$- \left(- m_o + M \left(\begin{pmatrix} m_1' K_1 \\ m_2' K_2 \end{pmatrix} M \right)^{-1} \begin{pmatrix} m_1' K_1 \\ m_2' K_2 \end{pmatrix} m_o \right)' k_2$$

$$(4\text{-}25)\quad c_{GB,T} = \left(m_3 - M \left(\begin{pmatrix} m_1' K_1 \\ m_2' K_2 \end{pmatrix} M \right)^{-1} \left(\begin{pmatrix} m_1' K_1 \\ m_2' K_2 \end{pmatrix} M \right)^{-1} \begin{pmatrix} -m_1' k_1 + m_1' K_1 m_3 \\ -m_2' k_2 + m_2' K_2 m_3 \end{pmatrix} \right)'$$

$$K_2 \left(m_3 - M \left(\begin{pmatrix} m_1' K_1 \\ m_2' K_2 \end{pmatrix} M \right)^{-1} \left(\begin{pmatrix} m_1' K_1 \\ m_2' K_2 \end{pmatrix} M \right)^{-1} \begin{pmatrix} -m_1' k_1 + m_1' K_1 m_3 \\ -m_2' k_2 + m_2' K_2 m_3 \end{pmatrix} \right)$$

$$- 2 \left(m_3 - M \left(\begin{pmatrix} m_1' K_1 \\ m_2' K_2 \end{pmatrix} M \right)^{-1} \left(\begin{pmatrix} m_1' K_1 \\ m_2' K_2 \end{pmatrix} M \right)^{-1} \begin{pmatrix} -m_1' k_1 + m_1' K_1 m_3 \\ -m_2' k_2 + m_2' K_2 m_3 \end{pmatrix} \right)' k_2$$

(4-13) ergibt zusammen mit (4-14) bis (4-19) und deren "Anfangsbedingungen" (4-20) bis (4-25) die Nash-Lösung des Problems der Minimierung von (4-2) und (4-3) unter der Nebenbedingung (4-1). Damit diese Lösung tatsächlich zu einem Minimum führt, muß die hinreichende Bedingung (d.h. die zweite Ableitung nach z_t bzw. $d_t > 0$) erfüllt sein. Wegen (4-7) und (4-11) muß also gelten:

$$(m_1' \ (K_1 + S_{ZB,t+1}) \ m_1)^{-1} > 0$$

bzw.

$$(m_2' \ (K_2 + S_{GB,t+1}) \ m_2)^{-1} > 0.$$

Darüber hinaus muß, damit eine Lösung überhaupt existiert, d.h.

$(\hat{S}_t\ M)^{-1}$ existiert $\quad |\hat{S}_t\ M| \neq 0$ sein [1].

Wie in den Modellen der Steuerung durch einen Agenten ist auch hier die optimale Politik eine dem Zustand der Vorperiode proportionale Politik. Die Verknüpfung der beiden Politiken ergibt sich aus $\hat{S}_t$ und $\hat{s}_t$ [2].

Bis jetzt haben wir uns ausschließlich mit der sogenannten feedback-Lösung oder closed-loop-Lösung beschäftigt. In Modellen, in denen nur von einem Agenten optimale Politik betrieben wurde, haben wir daneben auch die sogenannte open-loop-Lösung kennengelernt. Dabei ergab es sich, daß beide Politiken im Falle der Sicherheit miteinander überein-

---

1) Im Falle der einfachen Steuerungsprobleme fallen diese beiden Bedingungen für die Existenz und für die Garantie der Minimierung zusammen und entsprechen etwa in Abschnitt 3.3.2.) der Bedingung $(\xi_1'(K+S_{t+1})\xi_1)^{-1} > 0$. F. Kydland (1975) hat die Bedeutung von $|\hat{S}_t\ M| \neq 0$ dahingehend erklärt, daß nur unter dieser Bedingung die Reaktionskurven sich schneiden, und also nur so eine Cournot-Lösung existiert. Für Periode T muß gelten:

$$(m_1'K_1m_1)^{-1} > 0 \quad , \quad (m_2'K_2m_2)^{-1} > 0$$

Es gilt

$$(m_1'K_1m_1)^{-1} = \frac{1}{[e_1e_2\alpha_{22}(1)]^2 k_{1,ZB}+k_{2,ZB}} > 0$$

und

$$(m_2'K_2m_2)^{-1} = \frac{1}{k_{1,GB}+k_{2,GB}} > 0$$

Für Periode T-1 muß gelten: $m_1'(K_1+S_{ZB,T})m_1 > 0$, $m_2'(K_2+S_{GB,T})m_2 > 0$

Da K_1 und K_2 positiv semidefinit sind, sind auch $S_{ZB,T}$ und $S_{GB,T}$ positiv semidefinit (wegen (4-20) und (4-23)). Damit ist $m_1' K m_1 + m_1' S_{ZB,T} m_1 > 0$ und $m_2' K_2 m_2 + m_2' S_{GB,T} m_2 > 0$. Aus (4-14) und (4-17) folgt nun, daß alle $S_{ZB,t}$ und $S_{GB,t}$ positiv semidefinit sind und damit die ersten beiden Bedingungen erfüllt sind.

2) Unter Umständen kann $(\hat{S}_t\ M)^{-1}\ \hat{S}_t\ m_o$ und $(\hat{S}_t\ M)^{-1}\ s_t$ so geartet sein, daß eine oder beide Steuervariablen nicht von dem K des anderen Agenten abhängt. Dies garantiert ein hohes Maß an Unabhängigkeit, da dann die betreffende optimale Instrumentenwahl nicht etwa durch Variation der Kostenmatrix des Mitspielers beeinflußt wird.

stimmen[1]. Im Falle dynamischer Nichtkonstantsummenspiele gilt das nicht mehr. Der Grund liegt darin, daß die sinngemäße Übernahme des Optimalitätsprinzips der dynamischen Programmierung, nach dem auch unsere oben angegebene Lösung erfolgte, nicht mehr zu einem unbestrittenen Optimumbegriff führt. Betrachten wir etwa ein Spiel über die zwei Perioden t und t+1. Bei Anwendung des Optimalitätsprinzips wird die Nash-Lösung zunächst für Periode t+1 gesucht unter Zugrundelegung der Ausgangssituation zu Beginn dieser Periode. Anschließend wird die Nash-Lösung für die Periode t gesucht, wobei allerdings davon ausgegangen wird, daß in Periode t+1 nur eine Nash-Lösung gewählt worden ist, so daß alle anderen möglichen Lösungen jener Periode nicht mehr in Betracht gezogen werden. Dabei werden aber unter Umständen solche Lösungsmöglichkeiten übersehen, die in beiden Perioden zusammengenommen für beide Spieler geringere Gesamtkosten ergäben, jedoch in jeder einzelnen Periode keine Nash-Lösung darstellen[2]. Aus diesen Gründen könnte man versucht sein, die open-loop-Lösungen den closed-loop-Lösungen vorzuziehen. Daß der Sachverhalt nicht so ist, zeigt folgende Überlegung:

Angenommen beide Spieler haben sich zu Beginn des Spieles zu einer open-loop-Nash-Lösung entschlossen. Damit geben beide Spieler sofort ihre Instrumentenwahl von t=1 bis t=T bekannt. Nach der ersten Periode behält Spieler Nr. 1 seine Strategie bei. Da das Optimalitätsprinzip hier nicht gilt, wird es für Spieler Nr. 2 nicht optimal sein, unter diesen Umständen weiterhin bei seiner ursprünglichen Strate-

---

1) Nicht aber im Falle stochastischer Modelle oder aber in Modellen der Art des Abschnittes 3.6.2.).
2) Zwei anschauliche Beispiele für diese Erscheinung finden sich bei A. Starr und Y. Ho (1969b).

gie zu bleiben[1], d.h. er wird eine andere als die ursprünglich angegebene Strategie wählen. Das hat natürlich zur Folge, daß auch für seinen Mitspieler die ursprünglich gewählte Strategie nicht mehr optimal ist und er von ihr abweichen wird. Damit bestehen starke Zweifel an der Sinnhaftigkeit der open-loop-Lösung als Gleichgewichtslösung[2]. Die Schuld ist bei dem bekannten "Vertrauensproblem" in der Spieltheorie zu suchen, wonach kein Spieler sicher sein kann, daß ein Vorteil, den er seinem Mitspieler in einer Periode einräumt ihm in der nächsten Periode vergolten wird[3]. Die open-loop-Lösung ist nur dann sinnvoll, wenn beide Spieler an die angegebenen Strategien des Mitspielers glauben, oder wenn zu Beginn des Spieles die Strategien vertraglich fixiert werden[4], d.h. etwa Sanktionen für den Fall des Verstoßes vereinbart werden. Open-loop-Lösungen setzen also ein gewisses Maß an Kooperation voraus.

4.3.2.) Minimax-Lösungen

In Situationen, die durch Konstantsummenspiele dargestellt werden, spielen Minimax-Lösungen eine wesentliche Rolle[5]. Unter gewissen Umständen kann auch in Nichtnullsummenspielen die Minimax-Lösung von Interesse sein. Wir wollen hier die Minimax-Lösung darstellen,und dann ihre Sinnhaftigkeit diskutieren.

---

1) Vgl. Anhang V für ein Beispiel.
2) Vgl. auch F. Kydland (1975), S. 328-331
3) An der statischen Spieltheorie wäre in diesem Zusammenhang das "Prisonners Dilemma" zu nennen, das aus Vertrauensmangel auch zu einer nicht paretooptimalen Lösung führt. Vgl. R.D. Luce und H. Raiffa (1967). Die Vermutung, daß in dynamischen Spielen das Optimalitätsprinzip nur dann nicht gilt, wenn in einzelnen Perioden "Prisonners-Dilemma" Situationen auftreten, ist aber falsch, wie Starr und Ho (1969b) gezeigt haben. Vielmehr gilt, daß eine Art "dynamische Prisonners-Dilemma-Situation" nicht auftreten darf, damit das Optimalitätsprinzip wieder gilt.
4) Bei stochastischen Spielen können Zufallsschocks dazu führen, daß sich eine open-loop-Lösung für beide Spieler in der Zukunft als nachteilig erweisen, so daß sinnvollerweise neue Strategien gewählt werden müssen.
5) In Nullsummenspielen stimmt die Minimax-Lösung mit der Nash-Lösung überein. Das ist in Nichtkonstantsummenspielen nicht der Fall.

Minimax-Politiken sind Politiken, bei deren Wahl die größtmöglichen Kosten des betreffenden Spielers am geringsten sind, wenn der Mitspieler in der Wahl seiner Politik unbeschränkt ist. Die Minimax-Politik ist also eine Versicherung für den schlechtestmöglichen Fall, der diesem Spieler zustoßen kann. Wir können die Minimax-Politik für die Zentralbank deshalb definieren als[1]:

$\{z_t^m\}_{t=1...T}$ sind die Minimax-Politiken für die Zentralbank, wenn für alle möglichen $\{d_t\}_{t=1...T}$ gilt:

$$\max_{\{d_t\}} K_{ZB}(\{z_t^m\}, \{d_t\}) \leq \max_{\{d_t\}} K_{ZB}(\{z_t\},\{d_t\})$$

und analog für die Geschäftsbanken:

$\{d_t^m\}_{t=1...T}$ sind die Minimax-Politiken für die Geschäftsbanken wenn für alle möglichen $\{z_t\}_{t=1...T}$ gilt:

$$\max_{\{z_t\}} K_{GB}(\{d_t^m\},\{z_t\}) \leq \max_{\{z_t\}} K_{GB}(\{d_t\},\{z_t\})$$

Wir betrachten nun in der Folge die Minimax-Strategie der Geschäftsbanken. Die Minimax-Strategie der Zentralbank kann in gleicher Weise abgeleitet werden.

Die schlechteste Möglichkeit für die Geschäftsbanken ist die, daß die Zentralbank gerade das Kostenfunktional maximieren will, das die Geschäftsbanken minimieren wollen. Diese schlechteste aller Möglichkeiten wird in der Minimax-Strategie zugrundegelegt. Offensichtlich ist dies nun ein Nullsummenspiel,

---

1) Die Definitionen entsprechen denen bei A. Starr und Y. Ho (1969a), S. 190.

da die beiden Spieler genau entgegengesetzte Interessen haben. Es gilt also[1]:

$$K_{ZB} = - \sum_{T=1}^{T} \{\vec{Y}_t' \; K_2 \; \vec{Y}_t - 2 \; \vec{Y}_t' \; k_2\}$$

$$K_{GB} = \sum_{t=1}^{T} \{\vec{Y}_t' \; K_2 \; \vec{Y}_t - 2 \; \vec{Y}_t' \; k_2\}$$

$$\vec{Y}_t = m_o \; \vec{Y}_{t-1} + m_1 \; z_t + m_2 \; d_t + m_3$$

Für die optimale Politik gilt jetzt wegen (4-12):

$$\begin{pmatrix} z_t \\ d_t^m \end{pmatrix} = -\left(\begin{pmatrix} m_1'(- K_2+S_{ZB,t+1}) \\ m_2'(K_2+S_{GB,t+1}) \end{pmatrix} (m_1, m_2)\right)^{-1} \begin{pmatrix} m_1'(- K_2+S_{ZB,t+1}) \\ m_2'(K_2+S_{GB,t+1}) \end{pmatrix} m_o \vec{Y}_{t-1}$$

$$-\left(\begin{pmatrix} m_1'(-K_2+S_{ZB,t+1}) \\ m_2'(K_2+S_{GB,t+1}) \end{pmatrix} (m_1, m_2)\right)^{-1} \begin{pmatrix} - m_1'(- k_2+s_{ZB,t+1}) + m_1'(- K_2+S_{ZB,t+1}) m_3 \\ - m_2'(k_2+s_{GB,t+1}) + m_2'(K_2+S_{GB,t+1}) \; m_3 \end{pmatrix}$$

Es sind nun Betrachtungen über $S_{GB,t}$, $S_{ZB,t}$, $s_{GB,t}$, $s_{ZB,t}$, $c_{GB,t}$ und $c_{ZB,t}$ anzustellen. Wegen (4-20) und (4-23) gilt:

(4-26) $\qquad S_{GB,T} = - S_{ZB,T} = S_T$

Wegen (4-21) und (4-24) gilt

(4-27) $\qquad s_{GB,T} = - s_{GB,T} = s_T$

---

1) Die Maximierung der Kosten wird durch das Minuszeichen ausgedrückt. Damit ist der direkte Gegensatz der beiden Zielfunktionale deutlich. Für die Maximierungsaufgabe ergibt sich, wie es auch sein muß, gerade die entgegengesetzte Bedingung zweiter Ordnung.

Wegen (4-22) und (4-25) gilt

(4-28) $$c_{GB,T} = - c_{ZB,T} = c_T$$

Aus (4-14), (4-15) und (4-16) sowie (4-17), (4-18) und (4-19) folgt:

Wenn $$S_{GB,t+1} = - S_{ZB,t+1} = S_{t+1},\ s_{GB,t+1} = - s_{ZB,t+1} = s_{t+1},$$

$$c_{GB,t+1} = - c_{ZB,t+1} = c_{t+1}$$

dann gilt

(4-29) $$S_{GB,t} = - S_{ZB,t} = S_t\ ;\ s_{GB,t} = - s_{ZB,t} = s_t\ ;$$

$$c_{GB,t} = - c_{ZB,t} = c_t$$

(4-26), (4-27) und (4-28) sind aber die Anfangsbedingungen. Damit ist über vollständige Induktion (4-29) bewiesen.

Damit gilt für die Minimax-Strategie der Geschäftsbanken:

(4-30) $$d_t^m = + \frac{1}{\det} (+m_2'(K_2+S_{t+1})m_1, + m_1'(K_2+S_{t+1})m_1)$$

$$[m_2'(K_2+S_{t+1})m_o \vec{Y}_{t-1} + (- m_2'(k_2+s_{t+1}) + m_2'(K_2+S_{t+1})m_3]$$

mit $$\det = \begin{vmatrix} - m_1'(K_2+S_{t+1})m_1, & - m_1'(K_2+S_{t+1})m_2 \\ m_2'(K_2+S_{t+1})m_1, & + m_2'(K_2+S_{t+1})m_2 \end{vmatrix}$$

Die Minimax-Strategie ist eine extrem pessimistische Strategie. Unterstellen die Geschäftsbanken der Zentralbank rationale Handlungsweisen, dann ist sie nur dann begründet, wenn die Geschäftsbanken keinerlei Vorstellungen über das Kostenfunktional der Zentralbank hat. Schon bei geringen Informationen wird es aber z.B. für die Geschäftsbanken unwahrscheinlich sein, daß die Zentralbank aus der Veränderung der Einlagenhöhe einen Gewinn zieht, so daß es nicht sinnvoll erscheint, anzunehmen daß die Geschäftsbanken glauben, die Zentralbank maximiere einen Ausdruck, in dem unter anderem $k_{2,GB}d_t^2$ vorkommt.

4.3.3.) Stackelberg-Lösungen

In den beiden bisher vorgestellten Lösungskonzepten war keinerlei Zusammenarbeit zwischen den Spielern, als der Zentralbank und den Geschäftsbanken, erforderlich. In diesem und dem folgenden Abschnitt werden nun Lösungen behandelt, die nur dann existieren, wenn es eine gewisse Kooperation gibt.

In diesem Abschnitt soll die sogenannte Stackelberg-Lösung dargestellt werden[1)]. Es handelt sich dabei um eine assymmetrische Lösung: Ein Spieler (die Zentralbank) ist der Führer, der andere Spieler (die Geschäftsbanken) ist der Nachfolgende. Für diese Rollenverteilung müssen Gründe angegeben werden. Darauf werden wir weiter unten noch zurückkommen. Allerdings ist es für die Existenz der Lösung notwendig, daß

---

1) Die Stackelberg-Lösung wurde von H.v.Stackelberg (1951) für statische Oligopolfälle zum ersten mal angewandt und von M.Simaan und J. Cruz (1973) für dynamische Spiele wiederaufgenommen. F. Kydland (1973) hat diese Lösung auf ein Modell unserer Form angewandt. Die nachfolgenden Ausführungen beschreiten den von F. Kydland angegebenen Weg, der die Stackelberg-Lösung als "dominant player solution" bezeichnet.

eine einmal getroffene Aufteilung von allen Mitspielern akzeptiert wird. Bei der Stackelberg-Lösung $(z_t^{S,ZB}, d_t^{S,ZB})$ mit der Zentralbank als Führendem, wird angenommen, daß diese, unter Kenntnis der Reaktionskurve der Geschäftsbanken, ihre optimale Politik bekundet und die Geschäftsbanken ihren dazugehörigen Punkt auf ihrer Reaktionskurve wählen. Kommen wir zur Lösung im Detail:

Die Geschäftsbanken minimieren ihre Kosten unter Berücksichtigung der Zentralbankpolitik. Das ergibt die Reaktionsfunktion:

$$(4\text{-}11a) \qquad d_t = -(m_2'(K_2+\tilde{S}_{GB,t+1})m_2)^{-1} m_2'(K_2+\tilde{S}_{GB,t+1})m_o \vec{Y}_{t-1}$$

$$- (m_2'(K_2+\tilde{S}_{GB,t+1})m_2)^{-1} m_2'(K_2+\tilde{S}_{GB,t+1})m_1 z_t$$

$$- (m_2'(K_2+\tilde{S}_{GB,t+1})m_2)^{-1} \left[m_2'(K_2+\tilde{S}_{GB,t+1})m_3 - m_2'(k_2+\tilde{s}_{GB,t+1})\right]$$

$$(4\text{-}11b) \qquad d_t = p_{o,t} \vec{Y}_{t-1} + p_{1,t} z_t + p_{2,t}$$

Die Zentralbank minimiert ihre Kosten. Unter Verwendung der Bellman-Gleichung gilt für die Zentralbank dann die Aufgabe:

$$(4\text{-}4) \qquad \min_{z_t} \{\vec{Y}_t' K_1 \vec{Y}_t - 2 \vec{Y}_t' k_1 + V_{ZB}(\vec{Y}_t, t+1)\}$$

unter den Nebenbedingungen

$$(4\text{-}1) \qquad \vec{Y}_t = m_o \vec{Y}_{t-1} + m_1 z_t + m_2 d_t + m_3$$

(4-11b) $$d_t = p_{o,t}\,\vec{Y}_{t-1} + p_{1,t}\,z_t + p_{2,t}$$

Die Nebenbedingungen können zusammengefaßt werden zu:

$$\vec{Y}_t = (m_o + m_2\,p_{o,t})\vec{Y}_{t-1} + (m_1 + m_2\,p_{1,t})\,z_t + (m_3 + m_2\,p_{2,t})$$

(4-31) $$\vec{Y}_t = n_{o,t}\,\vec{Y}_{t-1} + n_{1,t}\,z_t + n_{2,t}$$

Es ist jetzt die optimale Politik für die Zentralbank zu bestimmen.
Angenommen es gilt:

(4-32) $$\tilde{V}_{ZB}(\vec{Y}_t, t+1) = \vec{Y}_t'\tilde{S}_{ZB,t+1}\,\vec{Y}_t - 2\,\vec{Y}_t'\tilde{s}_{ZB,t+1} + \tilde{c}_{ZB,t+1}$$

Eingesetzt in die Bellman-Gleichung (4-4) ergibt sich:

$$\tilde{V}_{ZB}(\vec{Y}_{t-1}, t) = \min_{z_t} \{\vec{Y}_t'(K_1 + \tilde{S}_{ZB,t+1})\vec{Y}_t - 2\,\vec{Y}_t'(k_1 + \tilde{s}_{ZB,t+1}) + \tilde{c}_{ZB,t+1}\}$$

Mit (4-31) gilt:

$$\tilde{V}_{ZB}(\vec{Y}_{t-1}, t) = \min_{z_t} \{(n_{o,t}\vec{Y}_{t-1} + n_{1,t}z_t + n_{2,t})'(K_1 + \tilde{S}_{ZB,t+1})$$
$$(n_{o,t}\vec{Y}_{t-1} + n_{1,t}z_t + n_{2,t}) - 2\,(n_{o,t}\vec{Y}_{t-1} + n_{1,t}z_t + n_{2,t})'$$
$$(k_1 + \tilde{s}_{ZB,t+1}) + \tilde{c}_{ZB,t+1}\}$$

Differenzieren und nullsetzen ergibt:

$$z_t^{S,ZB} = -\left(n'_{1,t}(K_1+\tilde{S}_{ZB,t+1})n_{1,t}\right)^{-1}\left[n'_{1,t}(K_1+\tilde{S}_{ZB,t+1})n_{o,t}\vec{Y}_{t-1}\right.$$

$$\left. + n'_{1,t}(K_1+\tilde{S}_{ZB,t+1})n_{2,t} - n'_{1,t}(k_1+\tilde{s}_{ZB,t+1})\right]$$

$$= \upsilon_{1,t}\vec{Y}_{t-1} + \upsilon_{2,t}$$

In (4-11b) eingesetzt, erhält man die Lösung für die Geschäftsbanken

$$d_t^{S,ZB} = (p_{o,t}+p_{1,t}\upsilon_{1,t})\vec{Y}_{t-1} + p_{2,t}+p_{1,t}\upsilon_{2,t}$$

Und für die Gesamtlösung schreiben wir:

$$(4\text{-}33)\begin{pmatrix} z_t^{S,ZB} \\ d_t^{S,ZB}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \upsilon_{1,t} \\ p_{o,t}+p_{1,t}\upsilon_{1,t}\end{pmatrix}\vec{Y}_{t-1} + \begin{pmatrix} \upsilon_{2,t} \\ p_{2,t}+p_{1,t}\upsilon_{2,t}\end{pmatrix}$$

$$= N_{o,t}\vec{Y}_{t-1} + N_{1,t}$$

Es sind jetzt die Größen $\tilde{S}_{ZB,t}$, $\tilde{S}_{GB,t}$, $\tilde{s}_{ZB,t}$, $\tilde{c}_{ZB,t}$, $\tilde{c}_{GB,t}$, $\tilde{s}_{GB,t}$ zu bestimmen[1]. Zunächst zu $\tilde{S}_{ZB,t}$, $\tilde{s}_{ZB,t}$, $\tilde{c}_{ZB,t}$:

---

1) $\tilde{V}_{ZB,t}$ gibt im Gegensatz zu $V_{ZB,t}$ die Minimierung bei der Stackelberg-Strategie an. $\tilde{V}_{ZB,t}$ kann deshalb auch geschrieben werden als:

$$\min_{z_t}\{(m_o\vec{Y}_{t-1}+m_1z_t+m_2(p_{o,t}\vec{Y}_{t-1}+p_{1,t}z_t+p_{2,t})+m_3)'(K_1+\tilde{S}_{ZB_{t+1}})$$
$$(m_o\vec{Y}_{t-1}+m_1z_t+m_2(p_{o,t}\vec{Y}_{t-1}+p_{1,t}z_t+p_{2,t})-2(m_o\vec{Y}_{t-1}+m_1z_t+m_2(p_{o,t}\vec{Y}_{t-1}$$
$$+p_{1,t}z_t+p_{2,t})(k_1+\tilde{s}_{ZB_{t+1}})+\tilde{c}_{ZB_{t+1}}$$

Für z_t die optimale Größe (4-33) eingesetzt ergibt:

$$\{(m_o+m_1\upsilon_{1,t}+m_2p_{o,t}+m_2p_{1,t}\upsilon_{1,t})\vec{Y}_{t-1}+m_1\upsilon_{2,t}+m_2p_{1,t}+m_2p_{1,t}\upsilon_{2,t}$$
$$+m_2p_{2,t}+m_3)'(K_1+\tilde{S}_{ZB_{t+1}})(\ldots)-2(\ldots)(k_1+\tilde{s}_{ZB_{t+1}})+\tilde{c}_{ZB_{t+1}}\}$$
$$=\{(m_oY_{t.1}+M(N_{o,t}Y_{t-1}+N_{1,t})+m_3)'(K_1+\tilde{S}_{ZB_{t+1}})(\ldots)-2(\ldots)(k_1+\tilde{s}_{ZB_{t+1}})+\tilde{c}_{ZB_{t+1}}\}$$

$$\tilde{V}_{ZB}(\vec{Y}_{t-1},t) = \min_{z_t} \{(m_o\vec{Y}_{t-1} + M\begin{pmatrix} z_t \\ d_t \end{pmatrix} + m_3)'(K_1+\tilde{\tilde{S}}_{ZB,t+1})(m_o\vec{Y}_{t-1} + M\begin{pmatrix} z_t \\ d_t \end{pmatrix} + m_3)$$

$$- 2\ (m_o\vec{Y}_{t-1} + M\begin{pmatrix} z_t \\ d_t \end{pmatrix} + m_3)'(k_1+\tilde{s}_{ZB,t+1}) + \tilde{c}_{ZB,t+1}\ /$$

Stackelberg}

$$= (m_o\vec{Y}_{t-1} + M(N_{o,t}\vec{Y}_{t-1} + N_{1,t}) + m_3)'(K_1+\tilde{S}_{ZB,t+1})$$

$$(m_o\vec{Y}_{t-1} + M(N_{o,t}\vec{Y}_{t-1} + N_{1,t}) + m_3) - 2\ (m_o\vec{Y}_{t-1}$$

$$+ M(N_{o,t}\vec{Y}_{t-1} + N_{1,t}) + m_3)'(k_1+\tilde{s}_{ZB,t+1}) + \tilde{c}_{ZB,t+1} = 0$$

Der Ausdruck enthält als:

-) quadratische Glieder in $\vec{Y}_{t-1}$:

$$\vec{Y}'_{t-1}(m_o + MN_{o,t})'(K_1+\tilde{S}_{ZB,t+1})(m_o + MN_{o,t})\vec{Y}_{t-1}$$

-) lineare Glieder in $\vec{Y}_{t-1}$:

$$2\ \vec{Y}'_{t-1}(m_o + MN_{o,t})'(K_1+\tilde{S}_{ZB,t+1})(MN_{1,t} + m_3)$$

$$- 2\ \vec{Y}'_{t-1}(m_o + MN_{o,t})'(k_1+\tilde{s}_{ZB,t+1})$$

-) Glieder ohne $\vec{Y}_{t-1}$:

$$(MN_{1,t} + m_3)'(K_1+\tilde{S}_{ZB,t+1})(MN_{1,t} + m_3) - 2\ (MN_{1,t} + m_3)'$$

$$(k_1+\tilde{s}_{ZB,t+1}) + \tilde{c}_{ZB,t+1}$$

Wegen (4-32) gilt dann:

$$(4\text{-}34)\quad \tilde{S}_{ZB,t} = (m_o + MN_{o,t})'(K_1 + \tilde{S}_{ZB,t+1})(m_o + MN_{o,t})$$

$$(4\text{-}35)\quad \tilde{s}_{ZB,t} = -(m_o + MN_{o,t})'(K_1 + \tilde{S}_{ZB,t+1})(MN_{1,t} + m_3)$$
$$+ (m_o + MN_{o,t})'(k_1 + \tilde{s}_{ZB,t+1})$$

$$(4\text{-}36)\quad \tilde{c}_{ZB,t} = (MN_{1,t} + m_3)'(K_1 + \tilde{S}_{ZB,t+1})(MN_{1,t} + m_3)$$
$$- 2(MN_{1,t} + m_3)'(k_1 + \tilde{s}_{ZB,t+1}) + \tilde{c}_{ZB,t+1}$$

und für die Geschäftsbanken[1]:

$$\tilde{V}_{GB}(\vec{Y}_{t-1}, t) = (m_o \vec{Y}_{t-1} + M(N_{o,t}\vec{Y}_{t-1} + N_{1,t}) + m_3)'(K_2 + \tilde{S}_{GB,t+1})$$
$$(m_o \vec{Y}_{t-1} + M(N_{o,t}\vec{Y}_{t-1} + N_{1,t}) + m_3) - 2(m_o \vec{Y}_{t-1} + M$$
$$(N_{o,t}\vec{Y}_{t-1} + N_{1,t}) + m_3)'(k_2 + \tilde{s}_{GB,t+1}) + \tilde{c}_{GB,t+1}$$

---

1) $\tilde{V}_{GB,t}$ gibt die Minimierung bei der Stackelberg-Strategie an. Man kann schreiben:

$$\min_{d_t} \{(m_o \vec{Y}_{t-1} + m_1 z_t^{S,ZB} + m_2 d_t + m_3)'(K_2 + \tilde{S}_{GB,t+1})(\ldots)$$
$$- 2(\ldots)(k_2 + \tilde{s}_{GB,t+1}) + \tilde{c}_{GB,t+1}\}$$
$$= \{m_o \vec{Y}_{t-1} + M(N_{o,t}\vec{Y}_{t-1} + N_{1,t}) + m_3)'(K_2 + \tilde{S}_{GB,t+1})(\ldots) - 2(\ldots)$$
$$(k_2 + \tilde{s}_{GB,t+1}) + \tilde{c}_{GB,t+1}\}$$

-) quadratische Glieder in $\vec{Y}_{t-1}$:

$$\vec{Y}'_{t-1}\ (m_o + MN_{o,t})'(K_2+\tilde{S}_{GB,t+1})(m_o + MN_{o,t})\ \vec{Y}_{t-1}$$

-) lineare Glieder in $\vec{Y}_{t-1}$:

$$2\ \vec{Y}'_{t-1}(m_o + MN_{o,t})'(K_2+\tilde{S}_{GB,t+1})(MN_{1,t}+m_3) - 2\ \vec{Y}'_{t-1}(m_o+MN_{o,t})'$$

$$(k_2+\tilde{s}_{GB,t+1})$$

-) Glieder ohne $\vec{Y}_{t-1}$:

$$(MN_{1,t}+ m_3)'(K_2+\tilde{S}_{GB,t+1})(MN_{1,t}+m_3) - 2\ (MN_{1,t}+ m_3)'(k_2+\tilde{s}_{GB,t+1})$$

$$+\ \tilde{c}_{GB,t+1}$$

Es gilt dann

$$(4\text{-}37)\quad \tilde{S}_{GB,t} = (m_o + MN_{o,t})'(K_2+\tilde{S}_{GB,t+1})(m_o + MN_{o,t})$$

$$(4\text{-}38)\quad \tilde{s}_{GB,t} = -\ (m_o + MN_{o,t})'((K_2+\tilde{S}_{GB,t+1})(MN_{1,t}+ m_3)$$

$$-\ (k_2+\tilde{s}_{GB,t+1}))$$

$$(4\text{-}39)\quad \tilde{c}_{GB,t} = (MN_{1,t}+ m_3)'(K_2+\tilde{S}_{GB,t+1})(MN_{1,t}+ m_3) - 2(MN_{1,t}+ m_3)'$$

$$(k_2+\tilde{s}_{GB,t+1}) + \tilde{c}_{GB,t+1}$$

Die 'Anfangsbedingungen' in Periode T sind:

$$\tilde{S}_{ZB,T} = (m_o + MN_{o,T})' K_1 \; (m_o + MN_{o,T})$$

$$\tilde{s}_{ZB,T} = - (m_o + MN_{o,T})' (K_1 (MN_{1,T} + m_3) - k_1)$$

$$\tilde{c}_{ZB,T} = (MN_{1,T} + m_3)' K_1 (MN_{1,T} + m_3) - 2 \; (MN_{1,T} + m_3)' \; k_1$$

$$\tilde{S}_{GB,T} = (m_o + MN_{o,T})' K_2 \; (m_o + MN_{o,T})$$

$$\tilde{s}_{GB,T} = - (m_o + MN_{o,T})' (K_2 (MN_{1,T} + m_3) - k_2)$$

$$\tilde{c}_{GB,T} = (MN_{1,T} + m_3)' K_2 \; (MN_{1,T} + m_3) - 2 \; (MN_{1,T} + m_3)' \; k_2$$

mit

$$N_{o,T} = \begin{pmatrix} -((m_1 - m_2 (m_2' K_2 m_2)^{-1} m_2' K_2 m_1)' K_1 (m_1 - m_2 (m_2' K_2 m_2)^{-1} m_2' K_2 m_1))^{-1} \\ ((m_1 - m_2 (m_2' K_2 m_2)^{-1} m_2' K_2 m_1)' K_1 (m_o - m_2 (m_2' K_2 m_2)^{-1} m_2' K_2 m_o)) \\ \\ -(m_2' K_2 m_2)^{-1} m_2' K_2 m_o + (m_2' K_2 m_2)^{-1} m_2' K_2 m_1 ((m_1 - m_2 (m_2' K_2 m_2)^{-1} m_2' K_2 - \\ m_1)' K_1 (m_1 - m_2 (m_2' K_2 m_2)^{-1} m_2' K_2 m_1))^{-1} ((m_1 - m_2 (m_2' K_2 m_2)^{-1} m_2' K_2 m_1)' \\ K_1 (m_o - m_2 (m_2' K_2 m_2)^{-1} m_2' K_2 m_o)) \end{pmatrix}$$

$$N_{1,T} = \begin{pmatrix} [n_{1,T}' K_1 n_{1,T}]^{-1} \; [n_{1,T}' \{ K_1 n_{2,T} - k_1 \}] \\ \\ p_{2,T} + p_{1,T} [n_{1,T}' K_1 n_{1,T}]^{-1} \; [n_{1,T}' \{K_1 n_{2,T} - k_1\}] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} - \left[(m_1 - m_2 (m_2' K_2 m_2)^{-1} m_2' K_2 m_1)' K_1 (m_1 - m_2 (m_2' K_2 m_2)^{-1} m_2' K_2 m_1)\right]^{-1} \\ \left[(m_1 - m_2 (m_2' K_2 m_2)^{-1} m_2' K_2 m_1)' \{K_1 (m_3 - m_2 (m_2' K_2 m_2)^{-1} (m_2' K_2 m_3 \right. \\ \left. - m_2' k_2)) - k_1\}\right] \\ \\ - (m_2' K_2 m_2)^{-1} (m_2' K_2 m_3 - m_2' k_2) + (m_2' K_2 m_2)^{-1} m_2' K_2 m_1 \left[(m_1 - m_2 (m_2' K_2 m_2)^{-1} \right. \\ \left. m_2' K_2 m_1)' K_1 (m_1 - m_2 (m_2' K_2 m_2)^{-1} m_2' K_2 m_1)\right]^{-1} \left[(m_1 - m_2 (m_2' K_2 m_2)^{-1} \right. \\ \left. m_2' K_2 m_1)' \{K_1 (m_3 - m_2 (m_2' K_2 m_2)^{-1} (m_2' K_2 m_3 - m_2' k_2)) - k_1\}\right] \end{pmatrix}$$

(4-33) bis (4-39), zusammen mit den Anfangsbedingungen, ergibt die Stackelberg-Lösung[1].

Die Frage nach der Anwendbarkeit der Stackelberg-Lösung ist jetzt zu stellen. Wie anfangs erläutert, erfordert die Stackelberg-Lösung eine Zuordnung von Unabhängigkeitsposition (Führer) und Abhängigkeitsposition (Nachfolgender). Wie ist es zu begründen, daß, wie wir annehmen, die Geschäftsbanken die Abhängigkeitsposition einnehmen?

In der Formulierung unserer Modelle wurde immer der Mindestreservesatz, ein zusätzliches Instrument der Zentralbank, mitberücksichtigt. Allerdings wurde in der Folge von der Zentralbank nicht davon Gebrauch gemacht. Die Veränderung der Mindestreserven ist jedoch ein geeignetes Mittel, die Gewinnsituation

---

1) Die Stackelberg-Lösung ist, wie aus (4-33) ersichtlich, proportional zu Y_{t-1}.

der Geschäftsbanken zu beeinflussen[1]. Lehnen die Geschäftsbanken eine von der Zentralbank im Sinne der Stackelberg-Lösung angebotene Kooperation ab, so könnte dies den Einsatz solcher zusätzlicher Instrumente provozieren. Dies ist nicht ratsam, zumal die Abhängigkeitsposition durchaus von Vorteil sein kann, und so der Anreiz einer Kampfstrategie, d.h. der Kampf um die Unabhängigkeitsposition möglicherweise entfällt[2)3)].

Die Stackelberg-Lösung wurde als Lösungskonzept für den Fall vorgeschlagen, daß ein Spieler das Kostenfunktional des anderen Spielers nicht kennt und deshalb die Abhängigkeitsposition einnimmt und die Entscheidung des Mitspielers erst abwartet[4]. Wenn wir unsere Lösung betrachten, so zeigt sich daß die optimale Politik der Geschäftsbanken sowohl von K_1 als auch von k_1 (den Parametern des Zentralbankkostenfunktionals) abhängt, also den Geschäftsbanken für ihre optimale Politik zur Verfügung stehen muß. Zumindest in unserem Fall ist also eine derartige Begründung der Stackelberg-Lösung falsch.

---

1) Vergleiche dazu die Kostenfunktionale der Geschäftsbanken in den Abschnitten 3.4.2.) und 4.2.). Man kann annehmen, daß eine Veränderung des Mindestreservesatzes lediglich zu einer entgegengesetzten Veränderung der Überschußreserven führt, und so nicht direkt die Gewinnsituation verändert. Allerdings kann man annehmen, daß durch die Abnahme der Überschußreserven als Reaktion auf die Erhöhung der Mindestreserven, den Banken andere Nachteile entstehen, etwa Zunahme des Risikos u.ä.
2) Vgl. dazu Abschnitt 4.3.5.)
3) Wenn beide Spieler die Unabhängigkeitsposition anstreben, dann wird das in der Oligopoltheorie als Bowley-Lösung bezeichnet.
4) So argumentieren Simaan and Cruz (1973).

4.3.4.) Paretooptimale Lösungen

Die Stackelberg-Lösung stellte eine kooperative Lösung in dem Sinne dar, daß die beiden Spieler sich bezüglich der Rollenverteilung einigen müssen. Jetzt soll eine Lösung vorgestellt werden, die zu einer paretooptimalen Situation führt[1)], dafür aber auch die Erstellung eines gemeinsamen Kostenfunktionals, die Einigung über die Verteilung der anfallenden Kosten und das Vertrauen in die Ehrlichkeit des Mitspielers oder die Erzwingung der Vertragstreue erfordert. Dies ist eine offensichtlich viel weitergehende Zusammenarbeit als im vorangehenden Abschnitt.

Die paretooptimale Lösung $(\{z_t^p\},\{d_t^p\})$ zeichnet sich dadurch aus, daß keine andere Lösung existiert, bei der die Kosten der Zentralbank und der Geschäftsbanken gleichzeitig niedrigere Werte annehmen. D.h. also:

$$(K_{ZB}(\{z_t^p\},\{d_t^p\}) \leq K_{ZB}(\{z_t\},\{d_t\}),\ K_{GB}(\{z_t^p\},\{d_t^p\}) \leq K_{GB}(\{z_t\},\{d_t\})$$

$$\forall\ z_t,\ d_t)$$

Bis jetzt wurden nur Probleme behandelt, bei denen jeder Spieler seine Kosten minimierte, und diese Kosten konnten immer durch eine Zahl ausgedrückt werden, so daß immer die Aufgabe in der Minimierung eines Skalars bestand. Nach der oben gegebenen Definition einer paretooptimalen Lösung stehen wir nun einem ganz neuen Pro-

1) A. Starr und Y. Ho (1969a) und (1969b) bezeichnen eine paretooptimale Situation als "noninferior" und dementsprechend die paretooptimalen Lösungen als "noninferior solutions".

blem gegenüber, bei dem es nicht um die Minimierung eines Skalars, sondern um die Minimierung des Vektors $(K_{ZB}, K_{GB})'$ geht. In einem System, in dem ein Skalar zu minimieren ist, kann die Beziehung zwischen zwei beliebigen Lösungen immer durch die Ordnung $\geq$ ausgedrückt werden. Anders ausgedrückt, die Menge der Lösungen ist vollständig geordnet. In einem System, dessen Kostenkriterium durch ein Vektor dargestellt wird, ist das nicht mehr der Fall. Außer Lösungen, die besser, gleich oder schlechter als eine vorgegebene Lösung sind, gibt es solche, die nicht zu vergleichen sind, nämlich dann, wenn $K'_{ZB} > K_{ZB}$, $K'_{GB} < K_{GB}$. Die Menge der Lösungen ist hier nur teilweise geordnet. Es kann nun gezeigt werden, daß man die Menge der paretooptimalen Lösungen erhält, wenn man die Kostenfunktionale $K = \mu K_{ZB} + (1-\mu) K_{GB}$; $\mu \geq 0$ minimiert[1)]. Das heißt also, die Optimierung des Vektors kann auf die Optimierung eines Skalars zurückgeführt werden. Allerdings ist klar, daß sobald K_{ZB} nicht gleich K_{GB} oder einem Vielfachen von K_{GB} ist, es für jedes zulässige μ eine andere Lösung gibt. Die paretooptimale Lösung ist ohne Vorgabe von μ nicht eindeutig. Um zu einer paretooptimalen Lösung zu gelangen, müssen also Zentralbank und Geschäftsbanken sich auf ein gemeinsames Kostenfunktional einigen, das heißt insbesondere auf ein μ einigen. Weiterhin müssen beide Spieler auch tatsächlich ihre Instrumente so wählen, daß dieses festgelegte Kostenfunktional minimiert wird. Dies sind schwerwiegende Hindernisse auf dem Weg zur paretooptimi-

---

1) L.A. Zadeh (1963)
N.O. Da Cunha and E. Polak (1967)
Es wird in diesen Arbeiten gezeigt, daß die notwendigen Bedingungen für paretooptimale Lösungen des ursprünglichen Problems unter Konvexitätsannahmen, insbesondere für die Komponenten des Kostenfunktionals, die bei uns erfüllt sind, äquivalent sind den notwendigen Bedingungen für die Minimierung der Linearkombinationen der Komponenten des Kostenfunktionals. Da Cunha und Polak zeigen dies, indem sie die Äquivalenz für ein sogenanntes kanonisches Problem (Basisproblem der mathematischen Programmierung) zeigen und dann das optimal-control Problem in ein kanonisches Problem umformen.

malen Lösung.

Die einzelnen Lösungsschritte ergeben sich hier wie bei einem einfachen Steuerungsproblem etwa des Abschnittes 3.2.3.) mit dem Kostenfunktional

$$K = \sum_{t=1}^{I} \Bigg\{ \begin{pmatrix} Y_t \\ Y_{t-1} \\ D_t \\ Z_t \\ d_t \\ z_t \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} \mu k_{ZB}, & 0, & 0 & , & 0 & , 0 & , & 0 \\ 0 & , 0, & 0 & , & 0 & , 0 & , & 0 \\ 0 & , 0, & (1-\mu)k_{GB} & , & -\gamma_2(1-\mu)k_{1,GB}, & 0 & , & 0 \\ 0 & , 0, & -(1-\mu)\gamma_2 k_{1,GB}, & & (1-\mu)\gamma_2^2 k_{1,GB}, & 0 & , & 0 \\ 0 & , 0, & 0 & , & 0 & , (1-\mu)k_{2,GB}, & & 0 \\ 0 & , 0, & 0 & , & 0 & , 0 & , \mu k_{2,ZB} & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} Y_t \\ Y_{t-1} \\ D_t \\ Z_t \\ d_t \\ z_t \end{pmatrix}$$

$$- 2(Y_t, Y_{t-1}, D_t, Z_t, d_t, z_t) \begin{pmatrix} \mu k_{1,ZB} Y_v \\ (1-\mu)\gamma_1 k_{1,GB} \\ (1-\mu)\gamma_1\gamma_2 k_{1,GB} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{const.}'' \Bigg\}$$

unter der Nebenbedingung (4-1).

4.3.5.) Vergleich zwischen verschiedenen Lösungskonzepten.

In den letzten Abschnitten wurden verschiedene Lösungskonzepte vorgestellt. Es ist nun von Interesse, welche Aussagen über die Beziehungen der einzelnen Lösungen angestellt werden können.

a) Der Vergleich zwischen Stackelberg-Lösung und Nash-Lösung[1)]

Die Nash-Lösung besteht aus jenen (z_t^n, d_t^n), die die beiden Funktionen (4-7) und (4-11) erfüllen. Bei der Stackelberg-Lösung wählt die Zentralbank, als Spieler in der Unabhängigkeitsposition jenen Punkt aus der Reaktionsfunktion der Geschäftsbanken, die sich in der Abhängigkeitsposition befinden, aus, der seine Kosten minimiert. Damit ist offensichtlich, daß wenn diese beiden Lösungen existieren, der Führer in der Stackelberg-Lösung sich mindestens genau so gut stellt wie in der Nash-Lösung. Für den Nachfolgenden ist dagegen sowohl eine Besser-Gleich- oder Schlechterstellung denkbar. Ohne nähere Angaben zu den Parametern kann bei unserem Modell keine eindeutige Aussage gemacht werden.

b) Nash- und Stackelberg-Lösung im Vergleich zur paretooptimalen Lösung.

Wir haben gesehen, daß in Nichtnullsummenspielen kein eindeutiger Optimalitätsbegriff existiert und verschiedene Lösungsansätze zu verschiedenen Ergebnissen führten. Damit wäre es nur Zufall, wenn eine Nash-Lösung oder eine Stackelberg-Lösung

1) Vergleiche hierzu auch Simaan und Cruz (1973), S. 536

auch paretooptimal wäre.

Kydland hat den Zusammenhang zwischen einer Nash-Lösung und einer Stackelberg-Lösung in einer fest vorgegebenen Periode t graphisch dargestellt[1]. In diesem Fall ist Y_{t-1}, D_{t-1}, Z_{t-1} etc. fest vorgegeben. D_t kann durch $d_t + D_{t-1}$ ersetzt werden und entsprechend Z_t durch $z_t + Z_{t-1}$. Damit kann die Kostenfunktion für Zentralbank und Geschäftsbanken unter Beachtung ihrer quadratisch-linearen Form in ein z_t-d_t-Diagramm eingezeichnet werden. Die Reaktionskurven (4-7) und (4-11) sind als Geraden in die Zeichnung einzutragen. Es zeigt sich, daß weder die Nash-Lösung N, noch die Stackelberg-Lösungen S_1 und S_2 in dieser Situation paretooptimal sind (vgl. Abb. IV, V). Mit anderen Worten, es tritt zu diesem Zeitpunkt t eine Prisonners-Dilemma-Situation auf. Die paretooptimale Lösung für den Zeitverlauf ist ein einfaches Steuerungsproblem, für das wieder das Optimalitätsprinzip gelten muß. D.h. in jeder Periode müssen die Kosten minimiert werden. Das ist hier nicht der Fall. Aus der Nichtparetooptimalität in einem Zeitpunkt kann also auf die Nichtparetooptimalität in dem gesamten Zeitraum geschlossen werden.

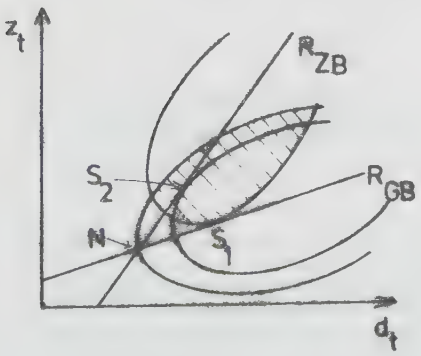


Abbildung IV

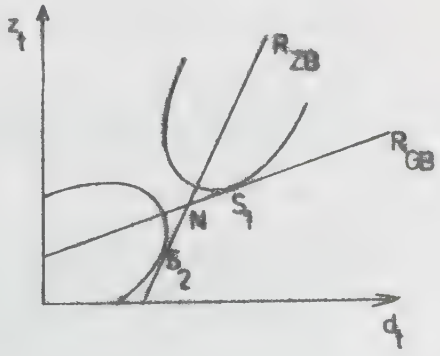


Abbildung V

1) F. Kydland (1975), S. 327.

Die Abbildung IV zeigt eine Situation, in der die Stackelberg-Lösung für beide Spieler vorteilhaft ist. In Abbildung V ist eine Situation dargestellt, in der die Zentralbank alleine von der Stackelberg-Lösung "profitiert". Stackelberg- und Nash- Lösungen gewinnen Bedeutung auch als Grenzen für Verhandlungsspielräume für paretooptimale Situationen.

Unter der Annahme, daß nur die Zentralbank die Unabhängigkeitsposition der Stackelberg-Lösung einnehmen kann, ist in Abbildung IV die Möglichkeit für den Verhandlungsspielraum für paretooptimale Lösungen eingezeichnet.

4.4.) Ein Modell ohne Nash-Lösung und mit einer Stackelberg-Lösung, die für den Führer ungünstig ist.

Es soll hier noch an einem Beispiel demonstriert werden, daß Nash-Lösungen nicht existieren müssen,und daß unter Umständen Stackelberg-Lösungen für den Spieler in der Abhängigkeitsposition von weit größerem Vorteil sind als für den Spieler in der Unabhängigkeitsposition.

Nehmen wir an, daß der Zentralbank aus der Veränderung der Zentralbankgeldmenge keine Kosten entstehen. Ihr alleiniges Ziel ist ein bestimmtes Volkseinkommen Y_{ZB}, das sie, beachtet man die Beziehung[1)2)3)]

---

1) Vgl. die Beziehung (3-75)
2) Gelegentlich wird statt der deterministischen Nebenbedingung eine stochastische Beziehung verwandt. Dann wird statt einem festen Wert die Minimierung der Varianz von Y_t um einen gewünschten Wert angestrebt. Vgl. dazu W. Poole (1970); B.M. Friedman (1975b) ; T.J. Sargent and N. Wallace (1975a), S. 1.
3) Vgl. S. 76.

$$Y_t = (1+g_1-e_2)Y_{t-1} + (e_2g_1 - g_1)Y_{t-2} + e_1e_2\alpha_{12}z_t + e_1e_2\alpha_{22}(\iota)d_t + e_2g_o$$

ohne weiteres erreichen kann, wenn sie sich gemäß ihrer Reaktionsfunktion

$$(4\text{-}41)\quad z_t = \frac{1}{e_1e_2\alpha_{12}}(Y_{ZB} - (1+g_1-e_2)Y_{t-1} - (e_2g_1-g_1)Y_{t-2} - e_1e_2\alpha_{22}(\iota)d_t - e_2g_o)$$

verhält[1].

Die Geschäftsbanken wollen dagegen ein anderes Volkseinkommen Y_{GB} durch die Veränderung der Einlagen erreichen, was, für sich genommen, auch einfach zu erreichen ist mit Hilfe der Reaktionsfunktion

$$(4\text{-}42)\quad d_t = \frac{1}{e_1e_2\alpha_{22}(\iota)}(Y_{GB} - (1+g_1-e_2)Y_{t-1} - (e_2g_1-g_1)Y_{t-2} - e_1e_2\alpha_{12}z_t - e_2g_o)$$

Reagieren aber beide Agenten in der durch (4-41) und (4-42) gekennzeichneten Art, dann entsteht eine Spielsituation, für die keine Nash-Lösung möglich ist. Der Grund liegt darin, daß die Matrix

$$\begin{pmatrix} e_1\ e_2\ \alpha_{12}, & e_1\ e_2\ \alpha_{22} \\ e_1\ e_2\ \alpha_{12}, & e_1\ e_2\ \alpha_{22} \end{pmatrix}$$

singulär ist, oder geometrisch ausgedrückt, daß die Reaktionsfunktionen in einem Zeitpunkt t, in einem z_t-d_t-Diagramm dargestellt, parallel verlaufen.

---

1) Da das Ziel, zumindest auf den ersten Blick, vollständig erreicht werden kann, benötigen wir, wie bei der herkömmlichen Theorie der Wirtschaftspolitik, kein ausführlicheres Kostenfunktional.

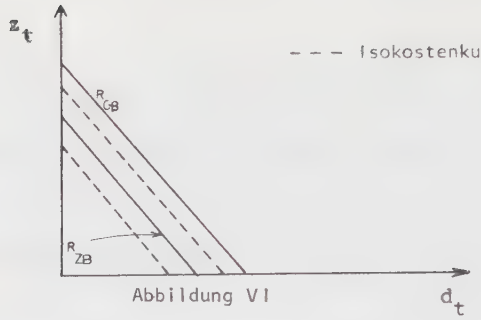


Abbildung VI

Der erste Blick hat also getäuscht: Die Zielwerte sind nicht ohne weiteres erreichbar.

Bekanntlich ist es durchaus möglich, daß eine Stackelberg-Lösung existiert, auch dann wenn es keine Nash - Lösung gibt. Da das Ziel jedoch nicht direkt erreicht werden kann, muß zunächst eine ausführliche Kostenfunktion für die Zentralbank aufgestellt werden. Wir verwenden

$$K_{ZB} = \sum_{t=1}^{T} (Y_t - Y_{ZB})^2$$

Diese Funktion ist zu minimieren unter den beiden Nebenbedingungen:

$$Y_t = (1+g_1 - e_2)Y_{t-1} + (e_2 g_1 - g_1)Y_{t-2} + e_1 e_2 \alpha_{12} z_t + e_1 e_2 \alpha_{22}(1) d_t + e_2 g_o$$

$$d_t = \frac{1}{e_1 e_2 \alpha_{22}(1)} (Y_{GB} - (1+g_1 - e_2)Y_{t-1} - (e_2 g_1 - g_1)Y_{t-2} - e_2 g_o - e_1 e_2 \alpha_{12} z_t)$$

Zusammengefaßt ergibt sich daraus:

$$Y_t = Y_{GB}$$

Damit ist es für die Zentralbank gleichgültig, welche Politik sie wählt, immer werden die Geschäftsbanken ihr Ziel Y_{GB} erreichen und die Kosten der Zentralbank sind immer $(Y_{GB} - Y_{ZB})^2$. In der Abbildung VI wird dies klar, wenn man bedenkt, daß eine Stackelberg-Lösung ein Punkt ist, den die Reaktionsfunktion der Geschäftsbanken und die Isokostenkurve der Zentralbank gemeinsam haben: Das ist in diesem Fall jeder Punkt auf der Reaktionskurve der Geschäftsbanken . Da in unserem Modell alle Punkte auf der Reaktionskurve auch die Zielvorstellungen des zugehörigen Agenten voll erfüllen, finden wir uns in unseren Überlegungen bestätigt. Dabei ist die Stackelberg-Lösung, wie man leicht sieht, in jedem Zeitpunkt paretooptimal. Dasselbe gilt damit auch für die Stackelberg-Lösung über den ganzen Zeitraum. Dennoch dürfte sie nicht im Sinne der Zentralbank sein. Diese wird vermutlich eher versuchen zu einer paretooptimalen Verhandlungslösung zu kommen, d.h. einer Lösung, bei der zu jedem Zeitpunkt ein Punkt zwischen R_{ZB} und R_{GB} verwirklicht wird[1]. Wir haben damit eine Situation kennengelernt, in der eine Stackelberg-Lösung, obwohl sie paretooptimal ist, doch zumindest für einen Spieler unbefriedigend ist[2].

---

1) Es wird hier angenommen, daß für die Geschäftsbanken das Kostenfunktional $\sum_t (Y_t - Y_{GB})^2$ lautet. Dann ist jeder Punkt zwischen R_{GB} und R_{ZB} paretooptimal.

2) Man könnte die Modelle zur Wirkung von Geldpolitik bei rationalen Erwartungen von Sargent und Wallace (1975a) und (1975b) als ein solches Spiel interpretieren, wenn man annähme, daß die Privaten das bestehende Volkseinkommen beibehalten wollen und die Zentralbank es ändern will. Allerdings wird eine solche Interpretation nicht der Absicht des Modells gerecht. Die Privaten sind nicht als ein Entscheidungsträger zu sehen, der Einfluß auf Y nehmen will.

4.5.) Die Möglichkeit von Täuschungen.

In den bisherigen Lösungen konnte jeder Spieler nur ein durch seinen Mitspieler eingeschränktes Optimum erreichen. Es soll jetzt gezeigt werden, unter welchen Umständen z.B. die Zentralbank ein absolutes Optimum erreichen, d.h. ihre Kosten zum Verschwinden bringen kann. Könnte etwa die Zentralbank, bei Gültigkeit ihres ursprünglichen Kostenfunktionals (bei dem z_t Kosten verursacht), sowohl die Veränderung der Zentralbankgeldmenge, als auch die Veränderung der Einlagen steuern,dann wäre dies ohne Schwierigkeiten möglich. Die optimale Politik wäre dann derart, daß $z_t = 0$ gesetzt und d_t so gewählt würde, daß die Zentralbank Y_v erreichte[1]. Es gälte (vgl. S. 128, (4-1)):

$$\hat{d}_1 = \frac{Y_v - m_o Y_o - m_3}{m_2} \qquad \Rightarrow \quad Y_1 = Y_v$$

$$\hat{d}_t = \frac{Y_v(1-m_o) - m_3}{m_2} \qquad \Rightarrow \quad Y_t = Y_t \quad t = 2...T$$

Nun ist es aber der Zentralbank nicht möglich d_t zu steuern, das können nur die Geschäftsbanken. Diese wählen ihr Instrument gemäß der Minimierung ihrer Kosten. Nehmen wir für die Geschäftsbanken die Abhängigkeitsposition bei der Stackelberg-Lösung an, dann gilt gemäß (4-11b):

$$d_t = p_{o,t}\, Y_{t-1} + p_1 z_t + p_{2,t} \qquad \text{mit } Y_{t-1} = (Y_{t-1}, Y_{t-2}, D_{t-1}, Z_{t-1}, d_{t-1}, z_{t-1})'$$

Da $z_t = 0$ ist, gilt:

$$d_t^s = p_{c,t}\, Y_{t-1} + p_{2,t}$$

1) Diese Politik erforderte, daß keine Einschränkung durch die Mindestreservepflicht erfolgt.

Das ist offensichtlich nicht die von der Zentralbank angestrebte Größe $\hat{d}_t$. Können allerdings die Geschäftsbanken die Zentralbankpolitik in der Periode t und eventuell in einigen vergangenen Perioden nicht beobachten, dann ist es denkbar, daß die Zentralbank gegenüber den Geschäftsbanken vorgibt, ein bestimmtes z_t zu wählen, bei dem gerade $d_t = \hat{d}_t$, obgleich sie in Wirklichkeit $z_t = 0$ wählt. Die Zentralbank täuscht die Geschäftsbanken[1)].

Eine solche Politik wird allerdings nur so lange Erfolg haben, wie diese Täuschung nicht bemerkt werden kann. Im Nachhinein ist dagegen zu vermuten, daß solche Handlungen Folgen für die zukünftige Strategie des getäuschten Mitspielers haben, insbesondere daß kooperative Lösungen dadurch unmöglich gemacht werden. So können, auf die gesamte Zeitspanne gesehen, die Kosten sich eher erhöhen als vermindern.

5.) Schluß

Aus mehreren Gründen bestehen an der Wirksamkeit der Geldpolitik als kurzfristiges Stabilisierungsinstrument Zweifel. Üblicherweise teilt man die Wirkungskette der Zentralbankpolitik in $Z \rightarrow M \rightarrow Y$ auf. Dann sind insbesondere Länge und Schwankungen der Verzögerungen im zweiten Glied der Kette ($M \rightarrow Y$), eventuell verbunden mit Unsicherheit über die Zukunft, dafür verantwortlich gemacht worden, daß eine kurzfristige aktive Geldpolitik nicht sinnvoll ist.

Derartige Probleme werden in der Arbeit nicht berücksichtigt.

---

1) Die Möglichkeit, Beobachtungslags zur Täuschung des Mitspielers auszunutzen, ist allerdings eher für die Geschäftsbanken gegeben.

Der von uns gewählte Übertragungsmechanismus zwischen Geldmenge und Volkseinkommen sorgt vielmehr in seiner Einfachheit für einen derart festen Zusammenhang zwischen diesen beiden Größen, daß diesem Teil der Wirkungskette (M → Y) keine Beachtung geschenkt werden muß. Einschränkungen der Wirksamkeit der Geldpolitik gibt es von hier gesehen nicht. Unsere Aufmerksamkeit gilt vielmehr der Überlegung, inwieweit die Zentralbank das Geldangebot (und nach dem oben gesagten also auch das Volkseinkommen) steuern kann.

Ein übliches Konzept, den Zusammenhang zwischen Zentralbankgeldmenge und Geldangebot darzustellen, ist der Geldschöpfungsmultiplikator. Dabei kann das Volkseinkommen über die Zentralbankgeldmenge unbeschränkt gesteuert werden. Dem wird ein Modell gegenübergestellt, bei dem den Geschäftsbanken, zumindest in gewissem Rahmen, eigenständige Politik zugestanden wird. Dies führt zu einer Spielsituation zwischen Zentralbank und Geschäftsbanken, für die verschiedene Lösungen denkbar sind. Dabei zeigt sich, daß das Modell mit einer Stackelberg-Lösung noch am ehesten dem Modell mit dem üblichen Geldschöpfungsmultiplikator ähnelt. Im Falle einer Nash-Lösung kann die Zentralbank mit Hilfe der Offenmarktpolitik ihre Ziele nur unter Einschränkungen erreichen. Die Mindestreservepolitik verliert ebenfalls erheblich an Wirkung, auch wenn die Geschäftsbanken keine Überschußreserven halten. Auf Modelle mit Unsicherheit wird auf zweierlei Weise eingegangen: Einmal wird in der Nebenbedingung ein additives Störglied, das normalverteilt ist, aufgenommen. Dabei bestätigt sich das bekannte Ergebnis, daß die optimale Politik die gleiche bleibt, daß aber die minimalen Kosten steigen. Zum anderen werden die Parameter als stochastische Größen gesehen. Hier zeigt sich, daß die optimale Politik vorsichtiger ist als im Falle mit Sicherheit.

Anschließend werden dynamische Modelle betrachtet. Zunächst wird das Modell mit dem Geldschöpfungsmultiplikator um einen verzögerten

Bestandsanpassungsprozeß bei den Überschußreserven erweitert. Wesentlich ist dabei, daß die Zentralbank die Regel dieses Anpassungsprozesses kennt. Unter diesen Umständen kann die Zentralbank mit Hilfe der dynamischen Programmierung ihre optimale Politik bestimmen. Diese ist proportional den Abweichungen des tatsächlichen vom gewünschten Volkseinkommen. Allerdings ergibt sich hier unter Umständen das Problem, daß die Zentralbank im Laufe der Zeit gezwungen ist, mit immer größeren Schwankungen in ihrer Politik ihren Zielwert zu erreichen (Instrumenteninstabilität). Dies wird verhindert, wenn Interventionskosten berücksichtigt werden. In diesem Fall ist jedoch optimale Zentralbankpolitik nicht mehr identisch mit einer Politik, die das angestrebte Volkseinkommen immer erreicht.

In einem weiteren Schritt wird ein Modell konstruiert, bei dem die Zentralbank (über die Veränderung der Zentralbankgeldmenge) und die Geschäftsbanken (über die Veränderung der Bankeinlagen) das Volkseinkommen beeinflussen können. Es wird gezeigt, daß die Zentralbank, will sie in dieser Situation ihre optimale Politik betreiben, das Bankenverhalten bis zum Ende des Planungshorizontes kennen muß.

Da es sich gezeigt hat, wie wichtig es ist, das Geschäftsbankenverhalten zu kennen, wird nun eine optimale Geschäftsbankenpolitik in Abhängigkeit von der Zentralbankpolitik hergeleitet. Man erkennt dabei folgendes: Die heutige Geschäftsbankenpolitik ist von der zukünftigen Zentralbankpolitik abhängig. Damit steht im Zusammenhang, daß eine heutige Zentralbankpolitik ganz unterschiedlich wirkt, je nachdem ob die Geschäftsbanken diese Politik als kurz- oder langfristig ansehen. Weiterhin spielt die Länge des Planungshorizontes der Geschäftsbanken für ihre optimale Reaktion auf eine Veränderung der Zentralbankgeldmenge eine Rolle.

Besonderheiten, die bei einer verzögerten Wirkung der Zentralbankpolitik auftreten, werden anschließend betrachtet. Weiterhin werden auch hier stochastische Nebenbedingungen eingeführt. Wie im statischen Fall unterscheidet sich auch hier im dynamischen Fall die optimale Politik nicht von der des deterministischen Modells. Auch wird ein Modell mit unterschiedlichen Erwartungsbildungen betrachtet: Die Geschäftsbanken haben eine adaptive Erwartungsbildung, die Zentralbank hat eine rationale Erwartungsbildung. Für diesen Fall kann eine optimale Zentralbankpolitik beschrieben werden.

Es werden nun sowohl für die Geschäftsbanken, als auch für die Zentralbank rationale Erwartungen angenommen. Diese Situation ist durch ein dynamisches Nullsummenspiel zu beschreiben. Beide Spieler, Zentralbank und Geschäftsbanken, kennen die Nebenbedingungen und beide Kostenfunktionale. Für dieses Spiel ergeben sich, je nach der Strategie der Mitspieler, verschiedene Lösungen, von denen folgende behandelt werden: Die Nash-Lösung, die Stackelberg-Lösung mit der Zentralbank in der Unabhängigkeitsposition, die Minimax-Lösung und die paretooptimale Lösung. All diese Lösungen werden berechnet und miteinander verglichen. Dabei zeigt sich, daß weder Stackelberg-Lösung noch Nash-Lösung in der Regel paretooptimal sind. Abschließend wird an einem Beispiel deutlich gemacht, daß auch die Unabhängigkeitsposition bei der Stackelberg-Lösung sehr unvorteilhaft sein kann. Weiter wird gezeigt, unter welchen Umständen die Zentralbank die Geschäftsbanken zu ihrem Vorteil täuschen kann.

Die der Arbeit zugrunde liegenden Modelle stellen einer starken Zentralbank (Fehlen des Sektors Ausland, fehlende Verschuldungsmöglichkeiten der Geschäftsbanken bei der Zentralbank) einen starken Geschäftsbankensektor gegenüber, der seine Einlagen, wenn auch

unter Kosten, selbst bestimmen kann. Dagegen spielt der restliche private Sektor keine wesentliche Rolle. Das ist eine extreme Vereinfachung, die es allerdings ermöglicht hat, die Probleme optimaler Zentralbankpolitik in den beschriebenen Modellen deutlich zu beschreiben. Abschwächungen dieser extremen Position sind sicherlich möglich. Insbesondere sind auch Modelle, in denen der restliche private Sektor die Geschäftsbanken in ihrer Rolle als Widerpart der Zentralbank ablöst, denkbar. Dies erforderte allerdings eine verstärkte Beachtung des Verhaltens dieses Sektors.

Anhang I (zu S. 54)

Zur Herleitung der optimalen Politik im Falle abdiskontierter Kosten

Zu lösen ist das Problem:

$$(I\text{-}1) \qquad \min_{z_0 \cdots z_{T-1}} \left(K'_{zB} = \rho^T k_1 y_T^2 + \sum_{t=0}^{T-1} \rho^t \left(k_1 y_t^2 + k_2 z_t^2\right)\right)$$

$$(I\text{-}2) \qquad \text{unter der Nebenbedingung: } y_{t+1} = \zeta_1 y_t + \zeta_2 z_t$$

$$\text{mit } \rho,\ k_1,\ k_2 > 0$$

1. Schritt: Aufspalten der Kosten

$$(I\text{-}3) \qquad K'_{zB} = \underbrace{\sum_{t=0}^{i-1} \rho^t \left(k_1 y_t^2 + k_2 z_t^2\right)}_{\text{1. Term}} + \underbrace{\sum_{t=1}^{T-1} \rho^t \left(k_1 y_t^2 + k_2 z_t^2\right) + \rho^T k_1 y_T^2}_{\text{2. Term}}$$

Nur Beachtung des 2. Terms (siehe Text) erforderlich.

2. Schritt: Formulierung der Bellmann-Gleichung

$$\rho^i V(y_i, i) = \rho^i \min_{z_i \cdots z_{T-1}} \left\{\rho^{T-i} k_1 y_T^2 + \sum_{t=i}^{T-1} \rho^{t-i} \left(k_1 y_t^2 + k_2 z_t^2\right)\right\}$$

$$V(y_i, i) = \min_{z_i} \left\{\rho^0 \left(k_1 y_i^2 + k_2 z_i^2\right) + \min_{z_{i+1}} \left[\rho^1 \left(k_1 y_{i+1}^2 + k_2 z_{i+1}^2\right) + \ldots\right]\right\}$$

Weiter gilt:

$$\rho\, V(y_{i+1}, i+1) = \rho \min_{z_{i+1}} \left\{\rho^0 \left(k_1 y_{i+1}^2 + k_2 z_{i+1}^2\right) + \ldots\right\}$$

(I-4) Damit folgt:

$$V(y_i,i) = \min_{z_i} \{(k_1 y_i^2 + k_2 z_i^2) + \rho\, V(y_{i+1},i+1)\}$$

3. Schritt: Herleitung der optimalen Politik

(I-5) Es gelte:

$$V(y_{t+1},t+1) = S_{t+1}\, y_{t+1}^2$$

Für t = T gilt dabei als Anfangsbedingung:

$$V(y_T,T) = k_1 y_T^2$$

Setzt man die Nebenbedingung (I-2) in (I-5) ein und dann in die Bellmann-Gleichung (I-4), dann gilt:

(I-6) $$V(y_t,t) = \min_{z_t} \{(k_1 y_t^2 + k_2 z_t^2) + \rho S_{t+1}(\zeta_1 y_t + \zeta_2 z_t)^2\}$$

Bilden der quadratischen Ergänzung:

$$V(y_t,t) = \min_{z_t} \{ \left[\zeta_1^2\, \rho\, S_{t+1} + k_1 - (\rho S_{t+1}\zeta_2^2 + k_2) \left(\frac{\rho S_{t+1}\zeta_1\zeta_2}{k_2+\rho S_{t+1}\zeta_2^2}\right)^2\right] y_t^2 + (k_2+\rho S_{t+1}\zeta_2^2)\left(z_t + \frac{\rho S_{t+1}\zeta_1\zeta_2}{k_2+\rho S_{t+1}\zeta_2^2} y_t\right)^2 \}$$

Die optimale Politik ist dann:

$$z_t = -\frac{\rho S_{t+1}\zeta_1\,\zeta_2}{k_2+\rho S_{t+1}\zeta_2^2}\; y_t$$

mit $$S_t = \zeta_1^2\, \rho\, S_{t+1} + k_1 - (\rho S_{t+1}\zeta_2^2 + k_2)\left(\frac{\rho S_{t+1}\zeta_1\,\zeta_2}{k_2+\rho S_{t+1}\zeta_2^2}\right)^2$$

Anhang II (zu S. 61)

Satz: Wenn $k_1 \geq 0$, $k_2 > 0$, dann ist

$$\phi_t = \frac{\zeta_1 \zeta_2 S_{t+1}}{k_2 + S_{t+1} \zeta_2^2}$$

eine in der Zeit monoton abnehmende Folge, d.h. $\phi_t < \phi_{t-1}$

Beweis: Der Beweis folgt G. Hewer, der den Beweis für Matrizen geliefert hat[1]. Der Beweis stellt eine Anwendung des diskreten Prinzips der Quasilinearisierung von Bellman dar. Es gilt:

Lemma: Für jede beliebige Größe ϕ gilt:

$$k_2 \phi_t^2 + (\zeta_1 - \zeta_2 \phi_t)^2 S_{t+1} = (\zeta_1 - \zeta_2 \phi)^2 + k_2 \phi^2 - (\zeta_2^2 S_{t+1} + k_2)(\phi - \phi_t)^2 \tag{II-1}$$

$$\text{mit } \phi_t = \frac{\zeta_1 \zeta_2 S_{t+1}}{k_2 + S_{t+1} \zeta_2^2}$$

Beweis: Die linke Seite von (II-1) kann geschrieben werden als:

$$\zeta_1^2 S_{t+1} - \zeta_1 \zeta_2 \phi_t S_{t+1} + k_2 \phi_t^2 - \zeta_1 \zeta_2 \phi S_{t+1} + \zeta_2^2 \phi_t^2 S_{t+1} = \zeta_1^2 S_{t+1} - \zeta_1 \zeta_2 \phi_t S_{t+1} \tag{II-2}$$

Daß die letzten drei Glieder null ergeben, zeigt sich, wenn ϕ_t eingesetzt wird.

---

1) G. Hewer (1973)

Bemerkung: Vergleicht man mit (3-42) dann sieht man, daß (II-2) bis auf k_1 mit S_t übereinstimmt.
Setzt man auf der rechten Seite von (II-1) ϕ_t ein, dann ergibt sich ebenfalls (II-2). Damit ist das Lemma bewiesen.
Kommen wir zum eigentlichen Beweis des Satzes:
Es wird zunächst eine Aussage über $\{S_t\}$ gemacht:
Wir beginnen mit S_{T-1}. Hierfür gilt (vgl. die Bemerkung):

$$(II\text{-}3) \qquad S_{T-1} = k_2\,\phi_{T-1}^2 + (\zeta_1-\zeta_2\,\phi_{T-1})^2\,S_T + k_1$$

Wegen $S_T = k_1$ gilt mit der Voraussetzung

$$S_{T-1} > S_T$$

Weiter gilt:

$$(II\text{-}4) \qquad S_{T-2} = k_2\,\phi_{T-2}^2 + (\zeta_1-\zeta_2\,\phi_{T-2})^2\,S_{T-1} + k_1$$

Subtrahiert man (II-3) von (II-4), wobei die Differenz dadurch erweitert wird, daß $(\zeta_1-\zeta_2\,\phi_{T-2})^2\,S_T$ subtrahiert und dann addiert wird, dann folgt:

$$(II\text{-}5) \qquad S_{T-2} - S_{T-1} = (\zeta_1-\zeta_2\,\phi_{T-2})^2(S_{T-1}-S_T) + (\zeta_1-\zeta_2\,\phi_{T-2})^2\,S_T$$
$$-(\zeta_1-\zeta_2\,\phi_{T-1})^2\,S_T + k_2\phi_{T-2}^2 - k_2\phi_{T-1}^2$$

Jetzt wird das Lemma so verwandt, daß $\phi = \phi_{T-2}$ gesetzt wird und $t = T-1$:

$$(II\text{-}6) \qquad S_{T-2} - S_{T-1} = (\zeta_1-\zeta_2\,\phi_{T-2})^2(S_{T-1}-S_T)+(\zeta_2^2\,S_T+k_2)(\phi_{T-2}-\phi_{T-1})^2$$

Es wurde gezeigt, daß $S_{T-1} - S_T > 0$. Nach Voraussetzung

ist auch $(\zeta_2^2 S_T + k_2) > 0$. Damit gilt:

$$S_{T-2} > S_{T-1}$$

Diese Beweisschritte können jetzt bis t = 0 wiederholt werden. Damit ist gezeigt, daß $\{S_t\}$ eine monoton fallende Folge ist.

Wegen

$$\frac{\partial \phi_t}{\partial S_{t+1}} = \frac{k_2 \zeta_1 \zeta_2}{(k_2 + \zeta_2^2 S_{t+1})^2} \tag{II-7}$$

gilt, daß mit abnehmendem S_{t+1} auch ϕ_t abnimmt. Damit ist der Beweis vollständig.

Anhang III (zu S. 67)

Der Beweis der Konvergenz von $S_t \to S$ bei $T \to \infty$ [1)]

Es wird bewiesen, daß unter gewissen Bedingungen die Folge $\{S_t\}$ gegen einen festen Wert S konvergiert und damit auch $\Phi_t \to \Phi$.

Der 1. Schritt ist analog zum Anhang II: Es wird bewiesen, daß $\{S_t\}$ eine monoton fallende Folge ist, die gegen einen Grenzwert konvergiert. Da die Entwicklung unserer Folge mit S_T, also dem eigentlichen Endwert, beginnt, empfiehlt es sich eine neue Folge $\{P_t\}$ zu definieren, die die Umkehrung von $\{S_t\}$ darstellt. So gilt:

$$S_t = P_{(T+1)-t} = P_1 \quad ; \quad S_{t+1} = P_{(T+1)-(t+1)} = P_{T-t} = P_{1-1}$$

$$S_1 = P_{(T+1)-1} = P_T \quad ; \quad S_T = P_{(T+1)-T} = P_1 \quad ; \quad S_{T+1} = P_o$$

Statt (3-60) gilt dann

$$(III\text{-}1) \qquad P_1 = (\zeta - \theta\Phi_1)'(K + P_{1-1})(\zeta - \theta\Phi_1)$$

Lemma 1: Es gilt für jedes Φ, das den Dimensionsanforderungen genügt:

$$(III\text{-}2) \qquad \begin{aligned} &(\zeta - \theta\Phi_1)'(P_{1-1} + K)(\zeta - \theta\Phi_1) = \\ &(\zeta - \theta\Phi)'(P_{1-1} + K)(\zeta - \theta\Phi) - (\Phi - \Phi_1)'\theta'(P_{1-1} + K)\theta(\Phi - \Phi_1) \end{aligned}$$

---

1) Der Beweis wird analog zum Beweis von G. Hewer (1973) geführt. Während Hewer den Beweis für die Beziehung

$$P_1 = \zeta' \{P_{1-1} - P_{1-1}\,\theta\,(\theta' P_{1-1}\theta + R)^{-1}\theta' P_{1-1}\}\,\zeta + C'C$$

führt, wollen wir den Beweis für die Beziehung (3-60) führen, die unter Beachtung der Fußnote 3 von S.55 und in P_1 umgeschrieben lautet:

$$P_1 = \zeta' \{(K + P_{1-1}) - (K + P_{1-1})\theta(\theta'(K + P_{1-1})\theta)^{-1}\,\theta'(K + P_{1-1})\}\,\zeta$$

mit

$$\Phi_1 = (\theta'(P_{1-1} + K)\theta)^{-1}\ \theta'(P_{1-1} + K)\zeta \qquad \text{(III-3)}$$

Beweis: (III-3) in die rechte Seite von (III-2) eingesetzt ergibt:

$$\zeta' \{(P_{1-1} + K) - (P_{1-1} + K)\theta(\theta'(P_{1-1} + K)\theta)^{-1}\ \theta'(P_{1-1} + K)\}\ \zeta$$

Das ist aber wegen Fußnote 1) S. 66 gleich der linken Seite von (III-2) wenn man die Umschreibung von S_t in P_1 beachtet. Damit ist das Lemma bewiesen.

Bevor wir zum ersten Satz kommen, sollen noch zwei Eigenschaften symmetrischer Matrizen erwähnt werden[1].
Ist A_i eine symmetrische Matrix, dann gilt

i) $\qquad A_1 \geq A_2 \quad \Rightarrow \quad B' A_1 B \geq B' A_2 B$

Dabei heißt $A_1 \geq A_2$, daß $A_1 - A_2$ positiv semidefinit ist.

Satz 1. Wenn $P_o = P_o' = 0$, $K = K' > 0$, dann gilt, daß eine eindeutige symmetrische Lösung P_1 für (III-1) existiert und daß $P_1 \geq P_{1-1}$.

Beweis:

a) Symmetrie: Da $P_o = 0$ und $K = K'$, ist, wie man aus (III-1) sieht, auch P_1 symmetrisch. Wenn $K = K'$ und $P_{1-1} = P_{1-1}'$, dann ist, wie man aus (III-1) sieht, auch P_1 symmetrisch. Damit ist über vollständige Induktion die Symmetrie bewiesen.

b) Monotonie: Wir beginnen mit P_1

---

1) Hewer (1973), S. 231

$$P_1 = (\zeta-\theta\Phi_1)'(K + P_o)(\zeta-\theta\Phi_1)$$

$$P_1 = (\zeta-\theta\Phi_1)'K(\zeta-\theta\Phi_1)$$

Wegen $K > 0$ und Bemerkung i), folgt $P_1 \geq 0$. Damit gilt $P_1 \geq P_o$.

Aus (III-1) folgt

$$P_2 = (\zeta-\theta\Phi_2)'(K + P_1)(\zeta-\theta\Phi_2)$$

$$P_1 = (\zeta-\theta\Phi_1)'(K + P_o)(\zeta-\theta\Phi_1)$$

Bilden von $P_2 - P_1$ und $(\zeta-\theta\Phi_2)'(K + P_o)(\zeta-\theta\Phi_2)$ addieren und subtrahieren ergibt:

(III-4)
$$P_2 - P_1 = (\zeta-\theta\Phi_2)'(P_1 - P_o)(\zeta-\theta\Phi_2) + (\zeta-\theta\Phi_2)'(P_o + K)(\zeta-\theta\Phi_2) - (\zeta-\theta\Phi_1)'(P_o + K)(\zeta-\theta\Phi_1)$$

Setzen wir in Lemma 1 $1 = 1$ und $\Phi = \Phi_2$, dann folgt, daß

(III-5)
$$(\zeta-\theta\Phi_2)'(P_o + K)(\zeta-\theta\Phi_2) - (\zeta-\theta\Phi_1)'(P_o + K)(\zeta-\theta\Phi_1) = (\Phi_2-\Phi_1)'\theta'(P_o + K)\theta(\Phi_2-\Phi_1)$$

(III-5) in (III-4) ergibt:

(III-6)
$$P_2 - P_1 = (\zeta-\theta\Phi_2)'(P_1 - P_o)(\zeta-\theta\Phi_2) + (\Phi_2-\Phi_1)'\theta'(P_o + K)\theta(\Phi_2-\Phi_1)$$

Da $P_1 \geq P_o$ und $P_o + K > 0$ ist wegen Vorbemerkung i) die rechte Seite ≥ 0, also $P_2 - P_1 \geq 0$. Durch vollständige Induktion kann jetzt die Monotonie der Folge gezeigt werden.

c) Eindeutigkeit: Es seien P_1 und P_1^+ zwei Lösungen von (III-1). Verfahren wir wie im Teil b), so ergibt sich:

$$P_1 - P_1^+ = (\zeta-\theta\Phi_1)'(P_{1-1} - P_{1-1}^+)(\zeta-\theta\Phi_1)$$

$$+ (\Phi_1-\Phi_1^+)'\theta'(P_{1-1}^+ + K)\theta(\Phi_1-\Phi_1^+) \geq 0$$

und ebenso:

$$P_1^+ - P_1 = (\zeta-\theta\Phi_1^+)'(P_{1-1}^+ - P_{1-1})(\zeta-\theta\Phi_1^+)$$

$$+ (\Phi_1^+-\Phi_1)'\theta'(P_{1-1} + K)\theta(\Phi_1^+-\Phi_1) \geq 0$$

Damit ist $P_1 - P_1^+ = 0$ oder $P_1 = P_1^+$, d.h. die Eindeutigkeit ist bewiesen.
Für den Beweis, daß P_1 gegen einen Grenzwert strebt muß zunächst noch ein anderer Satz bewiesen werden.

Satz 2. Erfüllt $\hat{P}_1$ die Gleichung

$$\hat{P}_1 = (\zeta-\theta\Phi)'(K + \hat{P}_{1-1})(\zeta-\theta\Phi)$$

für beliebiges Φ, und gilt $\hat{P}_o \geq P_o$ und die Voraussetzungen des Satzes 1, dann ist

$$P_1 \leq \hat{P}_1$$

Beweis:

$\hat{P}_1 = (\zeta-\theta\Phi)'(K + \hat{P}_{1-1})(\zeta-\theta\Phi)$

$$P_l = (\zeta-\theta\Phi)'(K + P_{l-1})(\zeta-\theta\Phi)$$

Unter Beachtung von Lemma 1 gilt dann (vgl. Beweis zu Satz 1):

$$\hat{P}_l - P_l = (\zeta-\theta\Phi)'(\hat{P}_{l-1} - P_{l-1})(\zeta-\theta\Phi) \tag{III-7}$$
$$+ (\Phi-\Phi_l)'\theta'(P_{l-1} + K)\theta(\Phi-\Phi_l)$$

Beginnen wir mit Periode $l = 1$

$P_o + K > 0$ (Voraussetzung bei Satz 1)

$\hat{P}_o - P_o \geq 0$ (Voraussetzung)

Damit ist wegen (III-7) und Vorbemerkung i) $\hat{P}_1 - P_1 \geq 0$. Mit dem Satz 1 folgt dann aber auch $(\hat{P}_2 - P_1) \geq 0$ etc. Der Satz ist bewiesen.

Lemma 2:[1] Sei $\{P_l\}$ eine Folge mit $P_1 \leq P_2 \leq \ldots \leq P_l \leq P$ für $l = 1, 2, 3, \ldots$ und ein vorgegebenes P. Dann existiert $\lim_{l\to\infty} P_l = P_\infty$ mit $P_\infty \leq P$.

Definition: Stabilisierbarkeit

(ζ,θ) heißt stabilisierbar, wenn eine Matrix ψ mit geeigneter Dimension existiert, so daß $(\zeta-\theta\psi)$ stabil ist, d.h. daß die Eigenwerte dieser Matrix absolut kleiner 1 sind.

Damit kann nun folgender Satz bewiesen werden:

Satz 3. Wenn $P_o = P_o' = 0$, $K = K' > 0$ und (ζ,θ) stabilisierbar ist, dann konvergiert jede Lösung P_l von (III-1) gegen P wobei

$$P = \zeta' \{(K + P) - (K + P)\theta(\theta'(K + P)\theta)^{-1} \theta'(K + P)\} \zeta$$

---

1) Hewer (1973), S. 231

Beweis: Da (ζ,θ) stabilisierbar ist, existiert ein $\bar{\zeta}$, so daß $(\bar{\zeta}-\theta\psi)$ stabil ist. $\hat{P}_l \geq 0$, $l = 0, 1, \ldots$ erfülle die Gleichung

$$\hat{P}_l = (\zeta-\theta\psi)'(\hat{P}_{l-1} + K)(\zeta-\theta\psi)$$

Mit Satz 2 gilt dann $P_l \leq \hat{P}_l$, wobei P_l aus Satz 1 monoton wachsend ist. Damit folgt aus Lemma 2, daß $\lim_{l\to\infty} P_l$ existiert, wenn $\lim_{l\to\infty} \hat{P}_l$ existiert.

Nun sei $\hat{P} = (\zeta-\theta\psi)'(\hat{P} + K)(\zeta-\theta\psi)$

Es ist nun

$$\hat{P}_l - \hat{P} = (\zeta-\theta\psi)'(\hat{P}_{l-1}+K)(\zeta-\theta\psi)-(\zeta-\theta\psi)'(\hat{P} + K)(\zeta-\theta\psi)$$

$$= (\zeta-\theta\psi)'(\hat{P}_{l-1} - \hat{P})(\zeta-\theta\psi)$$

Da $(\bar{\zeta}-\theta\psi)$ stabil ist, folgt mit $l \to \infty$ $\lim_{l\to\infty} \hat{P}_l - \hat{P} = 0$ oder $\lim_{l\to\infty} = \hat{P}$.

Damit ist gezeigt, daß $\lim_{l\to\infty} \hat{P}_l$ existiert und damit auch, daß $\lim_{l\to\infty} P_l$ existiert. Damit ist der Satz bewiesen.

Bemerkung: Statt der Voraussetzung $K > 0$ genügt die Voraussetzung $K \geq 0$ solange gesichert ist, daß $(\theta'(K + P_{l-1})\theta)^{-1}$ bzw. $(\theta'(K + S_{t+1})\theta)^{-1}$ existiert.
Diese Abwandlung der Voraussetzungen ist wichtig für die Formulierung (3-50), (3-52) unseres Problems. Mit den dort definierten K und θ ist diese Bedingung erfüllt.

Anhang IV (zu S. 95)

Die Herleitung der optimalen Politik für Periode eins bei unendlich langem Zeithorizont

Zu minimieren ist: $\sum_{t=1}^{T} (\vec{D}_t' K \vec{D}_t - 2 \vec{D}_t' K \vec{D}_t^*)$

unter der Nebenbedingung: $\vec{D}_t = \psi_o \vec{D}_{t-1} + \psi_1 d_t$

In Periode T gilt:

$$V_T = \min_{d_T} (\psi_o \vec{D}_{T-1} + \psi_1 d_T)' K (\psi_o \vec{D}_{T-1} + \psi_1 d_T) - 2(\psi_o \vec{D}_{T-1} + \psi_1 d_T)' K \vec{D}_T^*$$

Daraus folgt:

$$\hat{d}_T = - (\psi_1' K \psi_1)^{-1} (\psi_1' K \psi_o \vec{D}_{T-1} - \psi_1' K \vec{D}_T^*)$$

$$(IV\text{-}1) \quad = - (\psi_1' K \psi_1)^{-1} \psi_1' (K(\psi_o \vec{D}_{T-1} - \vec{D}_T^*))$$

$$= \Phi_{1,T} \vec{D}_{T-1} + \Phi_{2,T}$$

In den Kostenausdruck für Periode T eingesetzt ergibt sich V_T:

$$V_T = \vec{D}_{T-1}' (\psi_o + \psi_1 \Phi_{1,T})' K (\psi_o + \psi_1 \Phi_{1,T}) \vec{D}_{T-1}$$

$$+ (\psi_1 \Phi_{2,T})' K (\psi_1 \Phi_{2,T})$$

$$- 2 \vec{D}_{T-1}' (\psi_o + \psi_1 \Phi_{1,T})' K \vec{D}_T^*$$

$$- 2 (\psi_1 \Phi_{2,T})' K \vec{D}_T^*$$

In Periode T-1 gilt:

$$V_{T-1} = \min_{d_{T-1}} \{(\psi_o \vec{D}_{T-2} + \psi_1 d_{T-1})' K(\psi_o \vec{D}_{T-2} + \psi_1 d_{T-1}) - 2(\psi_o \vec{D}_{T-2} + \psi_1 d_{T-2})' K\vec{D}^*_{T-1} + V_T \}$$

$$= \min_{d_{T-1}} \{ (\psi_o \vec{D}_{T-2} + \psi_1 d_{T-1})' \left[K + (\psi_o + \psi_1 \Phi_{1,T})' K(\psi_o + \psi_1 \Phi_{1,T})\right] (\psi_o \vec{D}_{T-2} + \psi_1 d_{T-1})$$

$$- 2(\psi_o \vec{D}_{T-2} + \psi_1 d_{T-1})' \left[K\vec{D}^*_{T-1} + (\psi_o + \psi_1 \Phi_{1,T})' K\vec{D}^*_T\right]$$

$$+ (\psi_1 \Phi_{2,T})' K(\psi_1 \Phi_{2,T}) - 2(\psi_1 \Phi_{2,T})' K\vec{D}^*_T \}$$

Daraus folgt:

$$\hat{d}_{T-1} = - (\psi_1' \left[K + (\psi_o + \psi_1 \Phi_{1,T})' K(\psi_o + \psi_1 \Phi_{1,T})\right] \psi_1)^{-1}$$

$$(\psi_1' \left[K + (\psi_o + \psi_1 \Phi_{1,T})' K(\psi_o + \psi_1 \Phi_{1,T})\right] \psi_o \vec{D}_{T-2}$$

$$- \psi_1' \left[K\vec{D}^*_{T-1} + (\psi_o + \psi_1 \Phi_{1,T})' K\vec{D}^*_T\right])$$

$$\hat{d}_{T-1} = -(\psi_1' (K + S_T) \psi_1)^{-1} \psi_1' (K(\psi_o \vec{D}_{T-2} - \vec{D}^*_{T-1})$$

$$(IV\text{-}2) \quad + (\psi_o + \psi_1 \Phi_{1,T})' K((\psi_o + \psi_1 \Phi_{1,T}) \psi_o \vec{D}_{T-2} - \vec{D}^*_T))$$

$$= \Phi_{1,T-1} \vec{D}_{T-2} + \Phi_{2,T-1}$$

In den Kostenausdruck für Periode T-1 eingesetzt ergibt sich V_{T-1}:

$$V_{T-1} = \vec{D}_{T-2}(\psi_o + \psi_1 \Phi_{1,T-1})'(K + (\psi_o + \psi_1 \Phi_{1,T})'K(\psi_o + \psi_1 \Phi_{1,T}))$$

$$(\psi_o + \psi_1 \Phi_{1,T-1})\ \vec{D}_{T-2}$$

$$+ (\psi_1 \Phi_{2,T-1})'(K + (\psi_o + \psi_1 \Phi_{1,T})'K(\psi_o + \psi_1 \Phi_{1,T}))(\psi_1 \Phi_{2,T-1})$$

$$+ (\psi_1 \Phi_{2,T})'K(\psi_1 \Phi_{2,T}) - 2\ \vec{D}'_{T-2}(\psi_o + \psi_1 \Phi_{1,T-1})'(K\vec{D}^*_{T-1})$$

$$- 2\ \vec{D}'_{T-2}(\psi_o + \psi_1 \Phi_{1,T-1})'(\psi_o + \psi_1 \Phi_{1,T})'\ K\vec{D}^*_T$$

$$- 2\ \Phi'_{2,T-1}\ \psi'_1(K\vec{D}^*_{T-1} + (\psi_o + \psi_1 \Phi_{1,T})'K\vec{D}^*_T)$$

$$- 2\ (\psi_1 \Phi_{2,T})'K\vec{D}^*_T$$

In Periode T-2 gilt:

$$V_{T-2} = \min_{d_{T-2}} (\vec{D}'_{T-2}\ K\vec{D}_{T-2} - 2\ \vec{D}'_{T-2}\ K\vec{D}^*_{T-2} + V_{T-1})$$

$$= \min_{d_{T-2}} ((\vec{D}'_{T-2}(K + (\psi_o + \psi_1 \Phi_{1,T-1})'(K + (\psi_o + \psi_1 \Phi_{1,T})'K(\psi_o + \psi_1 \Phi_{1,T}))$$

$$(\psi_o + \psi_1 \Phi_{1,T-1})\ \vec{D}_{T-2})$$

$$- 2\ \vec{D}'_{T-2}(K\vec{D}^*_{T-2} + (\psi_o + \psi_1 \Phi_{1,T-1})'K\vec{D}^*_{T-1}$$

$$+ (\psi_o + \psi_1 \Phi_{1,T-1})'(\psi_o + \psi_1 \Phi_{1,T})'K\vec{D}^*_T)$$

$$+ (\psi_1 \Phi_{2,T})'K(\psi_1 \Phi_{2,T})$$

$$- 2\Phi'_{2,T-1}\ \psi'_1(K\vec{D}^*_{T-1} + (\psi_o + \psi_1 \Phi_{1,T})'K\vec{D}^*_T)$$

$$- 2\ (\psi_1 \Phi_{2,T})'K\vec{D}^*_T$$

Daraus folgt:

$$\hat{d}_{T-2} = -\,(\psi_1'(K+(\psi_o+\psi_1\,\Phi_{1,T-1})'(K+(\psi_o+\psi_1\,\Phi_{1,T})'K(\psi_o+\psi_1\,\Phi_{1,T}))$$

$$(\psi_o+\psi_1\,\Phi_{1,T-1}))\psi_1)^{-1}\psi_1'((K+(\psi_o+\psi_1\,\Phi_{1,T-1})'$$

$$(K+(\psi_o+\psi_1\,\Phi_{1,T})'K(\psi_o+\psi_1\,\Phi_{1,T}))(\psi_o+\psi_1\,\Phi_{1,T-1}))\psi_o\vec{D}_{T-3}$$

$$-\,(K\vec{D}^{*}_{T-2}+(\psi_o+\psi_1\,\Phi_{1,T-1})'K\vec{D}^{*}_{T-1}+(\psi_o+\psi_1\,\Phi_{1,T-1})'(\psi_o+\psi_1\,\Phi_{1,T})'K\vec{D}^{*}_{T})$$

$$\hat{d}_{T-2} = -\,(\psi_1'(K+S_{T-1})\psi_1)^{-1}\psi_1'(K(\psi_o\,\vec{D}_{T-3}-\vec{D}^{*}_{T-2})$$

$$+\,(\psi_o+\psi_1\,\Phi_{1,T})'K\,((\psi_o+\psi_1\,\Phi_{1,T})\psi_o\vec{D}_{T-3}-\vec{D}^{*}_{T-1})$$

(IV-3) $$+\,(\psi_o+\psi_1\,\Phi_{1,T-1})'(\psi_o+\psi_1\,\Phi_{1,T})'K\,((\psi_o+\psi_1\,\Phi_{1,T})(\psi_o+\psi_1\,\Phi_{1,T-1})$$

$$\psi_o\,\vec{D}_{T-3}-\vec{D}^{*}_{T}))$$

$$= \Phi_{1,T-2}\,\vec{D}_{T-3} - \Phi_{2,T-2}$$

Der Vergleich zwischen (IV-1), (IV-2) und (IV-3) zeigt das Gesetz nach dem die $\hat{d}_t$ gebildet werden. Mit $T \to \infty$ und der Beachtung, daß $\Phi_{1,t} \to \Phi_1$, $S_t \to S$ gilt (3-102) bzw. (3-103).

Anhang V (zu S. 145)

Ein Beispiel für die Instabilität der open-loop-Nash-Lösung

In dynamischen Nichtkonstantsummenspielen gilt, wie erwähnt das Optimalitätsprinzip nicht. Daraus folgt, daß open-loop-Lösungen und closed-loop-Lösungen nicht zusammenfallen. Das bedeutet, daß eine open-loop-Strategie über die Perioden 1 bis T schon in der Periode 2 nicht mehr optimal ist, wenn man jetzt die neuen Zustandsvariable kennt. Das ist, wie im Text geschildert, die Ursache dafür, daß die open-loop-Nash-Lösung ohne zusätzliche Bedingungen kein geeignetes Gleichgewichtskonzept darstellt. Wir führen hier ein einfaches Beispiel vor.

Zwei Spieler 1 und 2 haben das gleiche Ziel $y_t = 0$ und unterschiedliche Instrumente $x_{1,t}$ bzw. $x_{2,t}$, mit denen sie diese Zielgröße beeinflussen können. Abweichungen vom Ziel führen zu quadratischen Kosten. Die Anwendung der Instrumente führt ebenfalls zu quadratischen Kosten bei demjenigen, der sie anwendet. Das Spiel wird über zwei Perioden $t = 1,2$ gespielt. Wir formulieren demnach:

$$(V\text{-}1) \quad \begin{pmatrix} y_t \\ x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{t-1} \\ x_{1,t-1} \\ x_{2,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_{1,t} + \begin{pmatrix} b_2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_{2,t}$$

$$(V\text{-}2) \quad K_1 = \sum_{t=1}^{2} (y_t, x_{1,t}, x_{2,t}) \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_t \\ x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{pmatrix}$$

$$(V\text{-}3) \qquad K_3 = \sum_{t=1}^{2} \begin{pmatrix} y_t \\ x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} k_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_t \\ x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{pmatrix}$$

Die open-loop-Lösung erhält man, wenn man (V-1) nach y_o entwickelt, dies in K_1 und K_2 einsetzt und K_1 dann bezüglich $x_{1,1}$ und $x_{1,2}$ und K_2 bezüglich $x_{2,1}$ und $x_{2,2}$ minimiert. Die open-loop-Lösungen $\hat{x}_{i,j}$ $(i,j = 1,2)$ ergeben sich aus:

$$(V\text{-}4) \qquad \begin{pmatrix} k_1b_1^2+k_2+k_1a^2b_1^2, & k_1b_1b_2+k_1b_1b_2a^2, & k_1b_1^2a, & k_1b_1b_2a \\ k_1ab_1^2, & k_1ab_1b_2, & k_2+k_1b_1^2, & k_1b_1b_2 \\ k_3b_1b_2+k_3a^2b_1b_2, & k_3b_2^2+k_4+k_3^2a^2b_2^2, & k_3b_1b_2a, & k_3b_2^2a \\ k_3ab_1b_2, & k_3ab_2^2, & k_3b_1b_2, & k_4+k_3b_2^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_{1,1} \\ \hat{x}_{2,1} \\ \hat{x}_{1,2} \\ \hat{x}_{2,2} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} (k_1a_1b_1+k_1a^3b_1)y_o \\ k_1a^2b_1y_o \\ (k_3ab_2+k_3a^3b_2)y_o \\ k_3a^2y_o \end{pmatrix}$$

Es ergibt sich:

$$\hat{x}_{1,1} = \frac{1}{\Delta}\{k_1k_2k_3k_4ab_1b_2^2+k_1k_2k_4^2ab_1+k_1^2k_4ab_1^3+k_1k_2k_4^2a^3b_1\}\, y_o$$

$$\hat{x}_{2,1} = \frac{1}{\Delta}\{k_2^2k_3k_4ab_2+k_2^2k_3^2ab_2^3+k_2k_3k_4ab_1^2b_2+k_2^2k_3k_4a^3b_2\}\, y_o$$

$$\hat{x}_{1,2} = \frac{1}{\Delta}\{k_1k_2k_4^2a^2b_1-k_1^2k_3k_4a^2b_1^3b_2^2\}\, y_o$$

$$\hat{x}_{2,2} = \frac{1}{\Delta}\{k_2^2k_3k_4a^2b_2-k_1k_2k_3k_4a^4b_1^2b_2\}\, y_o$$

wobei Δ die Determinante der Matrix der linken Seite von (V-4) ist.

Als Zielgröße ergibt sich nach Ablauf der 1. Periode bei Anwendung dieser Strategien:

$$\hat{y}_1 = \{a + \frac{b_1}{\Delta}(k_1k_2k_3k_4ab_1b_2^2+k_1k_2k_4^2ab_1+k_1^2k_4ab_1^3+k_1k_2k_4^2a^3b_1)$$

$$+ \frac{b_2}{\Delta}(k_2^2k_3k_4ab_2+k_2^2k_3^2ab_2^3+k_1k_2k_3k_4ab_1^2b_2+k_2^2k_3k_4a^3b_2)\}\, y_o$$

Nimmt der Spieler 1 an, daß sein Mitspieler bei $\hat{x}_{2,2}$ bleibt, dann stellt sich für ihn zu Beginn der Periode 2 folgendes Optimierungsproblem:

$$\min_{x_{1,2}} \quad K = k_1(a\hat{y}_1+b_1x_{1,2}+b_2\hat{x}_{2,2})^2 + k_2x_{1,2}^2$$

Es ergibt sich als neue Politik für Periode 2:

$$\hat{\hat{x}}_{1,2} = -\frac{1}{k_1b_1^2\,k_2}(k_1ab_1\hat{y}_1+k_1b_1b_2\hat{x}_{2,2})$$

$$\hat{\hat{x}}_{1,2} = -\frac{1}{k_1b_1^2\,k_2}\, k_1ab_1\{a+\frac{b_1}{\Delta}(k_1k_2k_3k_4ab_1b_2^2+k_1k_2k_4^2ab_1$$

$$+ k_1^2k_4ab_1^3+k_1k_2k_4^2a^3b_1)+\frac{b_2}{\Delta}(k_2^2k_3k_4ab_2+k_2^2k_3^2ab_2^3+k_1k_2k_3k_4ab_1^2b_2$$

$$+ k_2^2k_3k_4a^3b_2)\}\, y_o+\frac{k_1b_1b_2}{\Delta}(k_2^2k_3k_4a^2b_2-k_1k_2k_3k_4a^4b_1^2b_2)y_o \neq \hat{x}_{1,2}$$

Symbolverzeichnis

B^a	Kreditangebot (Bondsangebot)
B^n	Kreditnachfrage (Bondsnachfrage)
C	Konsum
c	Bargeldabflußkoeffizient
D	Bankeinlagen
D	Zielwert der Bankeinlagen
d	Veränderung der Bankeinlagen in einer Periode
G, G_B	Gewinn der Geschäftsbank
I	Investitionen
i	Geldzins
K^a	Kapitalangebot
K^n	Kapitalnachfrage
K	Matrix aus Kostenparameter
K_{GB}	Kosten der Geschäftsbank
K_{ZB}	Kosten der Zentralbank
L	Lagoperator
M^a	Geldangebot
M^n	Geldnachfrage
r_B	Kreditzins
r_D	Zins für Bankeinlagen
r_K	Kapitalzins
Ü	Überschußreserven
Ü	Zielwert der Überschußreserven
Y	Volkseinkommen
Y	Zielwert des Volkseinkommens
y	Abweichungen des Volkseinkommens vom Zielwert
Z^a	Zentralbankgeldangebot
Z	Zentralbankgeldmenge
Z	Zielwert der Zentralbankgeldmenge
μ	Geldschöpfungsmultiplikator
ι	Mindestreservesatz für Bankeinlagen

Literaturverzeichnis

Aoki M.: "Local Controllability of a Decentralized Economic System", Review of Economic Studies, Vol. 41, 1974, S. 51-64.

Arrow K.J. and M. Kurz: Public Investment, the Rate of Return, and Optimal Fiscal Policy. Baltimore 1970.

Aström K.: Introduction to Stochastic Control Theory. New York - London 1970.

Athans M.: "The Discrete Time Linear-Quadratic-Gaussian Stochastic Control Problem", Annals of Economic and Social Measurement, Vol. 1, 1972, S. 449-491.

Athans M. and P.L. Falb: Optimal Control. New York - London 1966.

Brainard W.C.: "Financial Intermediaries and a Theory of Monetary Control", Yale Economic Essays, Vol. 4, 1964, S. 431-482, abgedruckt in: D.D. Hester and J. Tobin (eds.): Financial Markets and Economic Activity, Cowles Foundation Monograph, No. 21, New York 1967, Chapter 4, S. 94-141.

Brainard W.C.: "Uncertainty and the Effectiveness of Policy", American Economic Review, Papers and Proceedings, Vol. 57, 1967, S. 411-425.

Brainard W.C. and J. Tobin: "Pitfalls in Financial Model Building", American Economic Review, Papers and Proceedings, Vol. 58, 1968, S. 99-122.

Chow G.C.: "Problems of Economic Policy from the Viewpoint of Optimal Control", American Economic Review, Vol. 63, 1973, S. 825-837.

Chow G.C.: Analysis and Control of Dynamic Economic Systems, New York - London 1975.

Cyert R.M. and M.H. de Groot: "Multiperiod Decision Models with Alternating Choice as a Solution to the Duopoly Problem", Quarterly Journal of Economics, Vol. 84, 1970, S. 410-429.

Da Cunha N.O. and E. Polak: "Constrained Minimization under Vector-Valued Criteria in Finite-Dimensional Spaces", Journal of Mathematical Analysis and Application, Vol. 19, 1967, S. 103-124.

Dhrymes P.J.: Distributed Lags. San Francisco - Edinburgh 1971.

Dürr E.: "Time-lags der Geldpolitik", Kredit und Kapital, Vol. 3, 1970, S. 129-148.

Friedman B.M.: Economic Stabilization Policy: Methods in Optimization, Amsterdam - Oxford - New York 1975 (a).

Friedman B.M.: "Targets, Instruments and Indicators of Monetary Policy", Journal of Monetary Economics, Vol. 1, 1975 (b), S. 443-473.

Friedman J.W.: "Reaction Functions as Nash Equilibria", Review of Economic Studies, Vol. 43, 1976, S. 83-90.

Friedman M.: "The Lag in Effect of Monetary Policy", Journal of Political Economy, Vol. 69, 1961, S. 447-466, abgedruckt in: M. Friedman: The Optimum Quantity of Money, Chicago 1969, S. 237-260.

Gordon R.H.: "An Interpretation of the Costs on the Instruments in Deterministic Linear-Quadratic Control, International Economic Review, Vol. 17, 1976, S. 779-781.

Gramlich E.S.: "The Usefullness of Monetary and Fiscal Policy as Discretionary Stabilization Tools", Journal of Money, Credit and Banking, Vol. 3, 1971, S. 506-532.

Hahn W.: "Über die Anwendung der Methode von Liapunov auf Differenzengleichungen", Mathematische Annalen, Vol. 36, 1958, S. 430-441.

Halkin H.: "Optimal Control for Systems Described by Difference Equations", in: C. Leondes (ed.): Advances in Control Systems: Theory and Applications, New York 1964, S. 173-196.

Hamburger M.J.: "Indicators of Monetary Policy: The Arguments and the Evidence", American Economic Review, Papers and Proceedings, Vol. 60, 1970, S. 32-39.

Hewer G.: "Analysis of a Discrete Matrix Riccati Equation of Linear Control and Kalman Filtering", Journal of Mathematical Analysis and Application, Vol. 42, 1973, S. 226-236.

Hicks J.R.: Value and Capital. Oxford 1946.

Holbrook R.S.: "Optimal Economic Policy and the Problem of Instrument Instability", American Economic Review, Vol. 62, 1972, S. 57-65.

Jorgenson D.W.: "Anticipations and Investment Behavior", in: J.S. Duessenberry, G. Fromm, L.R. Klein, E. Kuh (eds.): The Brookings Quarterly Econometric Model of the United States, Chicago - Amsterdam 1965, S. 35-92.

Kareken J. and R.M. Solow: "Lags in Monetary Policy", in: Commission on Money and Credit: Stabilization Policies, Englewood Cliffs 1963, S. 14-96.

Keynes J.M.: "Letter to R.F. Harrod, 4 July 1938", in: D. Moggridge (ed.): The Collected Writings of John Maynard Keynes, Vol. 14, London 1973, S. 295-297.

Krelle W.: Preistheorie, Tübingen - Zürich 1961.

Kydland F.: "Noncooperative and Dominant Player Solutions in Discrete Dynamic Games", International Economic Review, Vol. 16, 1975, S. 321-335.

Lucas jr., R.E.: "Econometric Policy Evaluation: A Critique", in: K. Brunner and A. Meltzer (eds.): The Phillips Curve and Labor Markets. Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy. A supplementary series to the Journal of Monetary Economics, Amsterdam - New York - Oxford 1976, S. 19-46.

Luce R.D. and H. Raiffa: Games and Decisions, 7. Auflage, New York - London - Sydney 1967.

Meade J.E.: The Controlled Economy. Principles of Political Economy. London 1971.

Monatsbericht der Deutschen Bundesbank, Juni 1973, S. 47-48.

Muehlen P. von zur: "On the Rationality of Discontinious Monetary Policy", Special Studies Paper No. 77, Federal Reserve Board, Washington 1976.

Muth J.F.: "Optimal Properties of Exponentially Weighted Forecasts", Journal of the American Statistical Association, Vol. 55, 1960, S. 299-306.

Muth J.F.: "Rational Expectations and the Theory of Price Movements", Econometrica, Vol. 29, 1961, S. 315-335.

Nerlove M.: Distributed Lags and the Demand Analysis for Agricultural and other Commodities, US-Department of Agriculture, Handbook No. 141, 1958.

Neumann K.: Dynamische Optimierung, Mannheim 1969.

Phlips L.: Applied Consumption Analysis, Amsterdam - Oxford - New York 1974.

Pindyck R.S.: "The Discrete - Time Tracking Problem with a Time Delay in the Control", IEEE Transactions on the Automatic Control, Vol. AC-17, 1972, S. 397-398.

Pindyck R.S.: Optimal Planning for Economic Stabilization. Amsterdam - London 1973.

Poole W.: "Optimal Choice of Monetary Policy Instruments in a Simple Stochastic Macro Model", Quarterly Journal of Economics, Vol. 84, 1970, S. 197-216.

Ramser H.-J.: "Rationale Erwartungen und Wirtschaftspolitik", Diskussionsbeiträge des Fachbereichs Wirtschaftswissenschaften der Universität Konstanz, No. 84, 1976, erscheint in der Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft.

Rasche R.H.: "Simulations of Stabilization Policies for 1966-1970", Journal of Money, Credit and Banking, Vol. 5, 1973, S. 1-25.

Richter R., U. Schlieper, W. Friedmann: Makroökonomik. Eine Einführung. Mit einem Beitrag von J. Ebel, 2. Auflage, Berlin - Heidelberg - New York 1975.

Sargent T.J. and N. Wallace: " 'Rational' Expectations, the Optimal Monetary Instruments and the Optimal Money Supply Rule", Journal of Political Economy, Vol. 83, 1975 (a), S. 241-254.

Sargent T.J. and N. Wallace: "Rational Expectations and the Theory of Economic Policy", Studies in Monetary Economics No. 2, Federal Reserve Bank of Minneapolis 1975 (b).

Simaan M. and J.B. Cruz jr.: "On the Stackelberg-Strategie in Nonzero-Sum Games", Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 11, 1973, S. 533-555.

Sims C.A.: "Optimal Stable Policies for Unstable Instruments", Annals of Economic and Social Measurement, Vol. 3, 1974, S. 257-265.

Solow R.M.: "On a Family of Lag Distributions", Econometrica, Vol. 28, 1960, S. 399-406.

Stackelberg H. v.: Grundlagen der theoretischen Volkswirtschaftslehre, 2. Auflage, Tübingen - Zürich 1951.

Starr A.W. and Y.C. Ho: "Nonzero-Sum Differential Games", Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 3, 1969 (a), S. 184-206.

Starr A.W. and Y.C. Ho: "Further Properties of Nonzero-Sum Differential Games", Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 3, 1969 (b), S. 207-219.

Swamy K.N. and T.J. Tarn: "Optimal Control of Discrete Bilinear Systems", in: Mayne and Brockett (eds.): Methods in System Theory, Dordrecht 1973.

Theil H.: Optimal Decision Rules for Government and Industry, Amsterdam - Chicago 1964.

Tobin J.: "Liquidity Preferences as Behavior Towards Risk", Review of Economic Studies, Vol. 25, 1958, S. 65-86, abgedruckt in: D.D. Hester and J. Tobin (eds.): Risk Aversion and Portfolio Choice, Cowles Foundation Monograph No. 19, New York 1967, S. 1-26.

Tobin J.: "Commercial Banks as Creators of 'Money' ", in: D. Carson (ed.): Banking and Monetary Studies, Homewood 1963, S. 408-419, abgedruckt in: D.D. Hester and J. Tobin (eds.): Financial Markets and Economic Activity, Cowles Foundation Monograph No. 21, New York 1967, S. 1-11.

Towey R.E.: "Money Creation and the Theory of the Banking Firm", Jounal of Finance, Vol. 29, 1974, S. 57-72.

Turnovsky S.J.: "The Stability Properties of Optimal Economic Policies", American Economic Review, Vol. 64, 1974, S. 136-148.

Zadeh L.A.: "Optimality and Non-Scalar-Valued Performance Criteria", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-8, 1963, S. 59-60.

Abstract

HERRMANN, HEINZ:

PROBLEME DER GELDPOLITIK UNTER BESONDERER BERÜCKSICHTIGUNG DER REAKTIONEN DER GESCHÄFTSBANKEN -EINE STEUERUNGSTHEORETISCHE UNTERSUCHUNG-

Zunächst wird eine statische Wirtschaft betrachtet, die aus dem privaten Nichtbankensektor, einer monopolistischen Geschäftsbank und der Zentralbank besteht. Die Zentralbank will ihre Zielfunktion optimieren, die einen Zielwert für das Volkseinkommen und für das Zentralbankgeldvolumen beinhaltet, die Geschäftsbank will ihren Gewinn maximieren. In diesem Modell werden die Möglichkeiten der Offenmarktpolitik untersucht. Anschließend wird angenommen, daß die Geschäftsbank in einem dynamischen Modell ihren Gewinn über einen gewissen Planungshorizont maximieren will. Hier wird untersucht, wie dabei unterschiedliche Erwartungen über das Zentralbankverhalten die Geschäftsbankpolitik beeinflussen. Zum Schluß wird angenommen, daß sowohl Zentralbank als auch Geschäftsbank rationale Erwartungen besitzen. Mit Hilfe von Veränderung der Zentralbankgeldmenge bzw. der Einlagen versuchen Zentralbank bzw. Geschäftsbank ihre Zielfunktion zu optimieren. Geldpolitik kann hier im Rahmen eines dynamischen Nichtkonstantsummenspiels dargestellt werden.